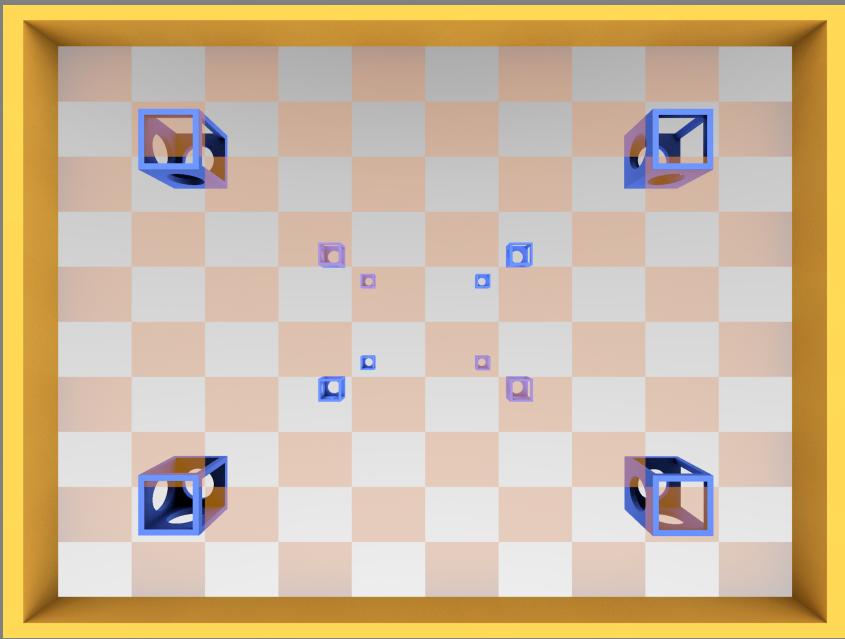




Geometria Descrittiva Digitale

Lineamenti di geometria, rappresentazione
e storia,
dai fondamenti proiettivi al disegno
dell'ordine architettonico

ESTRATTO

Riccardo Migliari, ...

last updated: 23 settembre 2026

Riccardo Migliari

Geometria Descrittiva Digitale

Lineamenti di geometria, rappresentazione e storia, dai fondamenti proiettivi al disegno dell'ordine architettonico

aggiornamento 23 settembre 2026

La costruzione nello spazio euclideo Σ

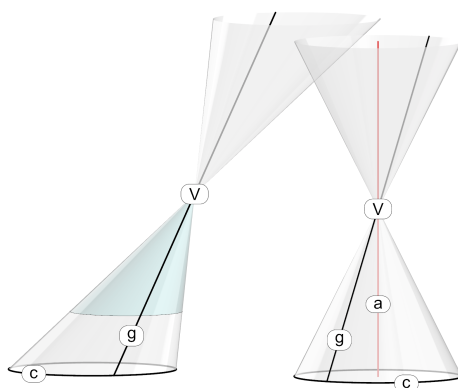
Il mondo come è

Capitolo 5

Le sezioni coniche

5.1 Alcune nozioni preliminari

Figura 44 Il cono come luogo geometrico: a sinistra il cono obliquo o generico, come superficie a due falde, a destra il cono rotondo o di rivoluzione, pure come superficie a due falde; in azzurro il cono come solido



Dati nello spazio una circonferenza c e un punto V , che non stia nello stesso piano di c , chiamiamo **cono** la superficie luogo geometrico di tutte le rette che passano per V e per un qualsiasi punto di c (**figura 44**). Le rette che descrivono questo luogo geometrico si dicono **generatrici** della superficie, la circonferenza c si dice **direttrice** e il punto V **vertice** del cono. Tutte le generatrici debbono intendersi estese all'infinito sicché la superficie stessa si compone di due **falde** opposte al vertice V .

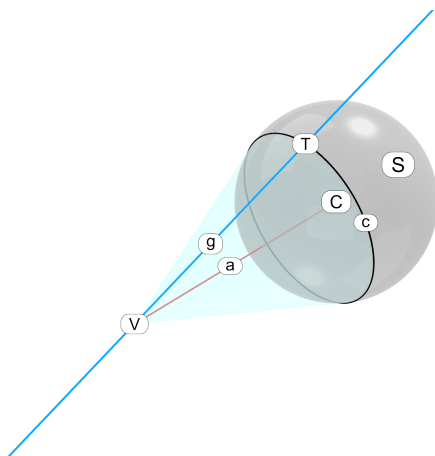
Il volume delimitato da una parte della superficie conica compresa tra il vertice V e la direttrice c , e dal cerchio di base corrispondente (in azzurro nella figura), è un cono solido e finito.

Conduciamo per il centro C della direttrice la retta a perpendicolare al piano della direttrice stessa. Se il vertice V del cono appartiene a questa retta, che si dice **asse**

del cono, allora la superficie si dice **cono circolare retto**, o anche **cono rotondo** o **cono di rivoluzione** perché si può descrivere come generato da una retta g che ruota intorno all'asse a .

5.1.1 Proprietà del cono circoscritto a una sfera

Figura 45 Tutti i segmenti, come VT , che escono da un qualsiasi punto dello spazio e sono tangenti a una sfera sono uguali



Consideriamo, nello spazio Σ , un punto V e una sfera S di centro C , tali che V sia esterno alla sfera (**figura 45**). Se da V conduciamo tutte le rette tangenti alla sfera, otteniamo un cono rotondo. Il luogo dei punti di contatto T di queste tangenti con la superficie della sfera è una circonferenza c , che può essere assunta come direttrice di questo cono. La retta VC è perpendicolare al piano in cui giace la direttrice c ed è l'asse a del cono. Evidentemente, tutti i segmenti VT , compresi sulle tangenti fra i punti V e T , sono uguali.

Notiamo, infine, che in un cono rotondo due piani perpendicolari all'asse staccano su tutte le generatrici segmenti della stessa lunghezza. Ciò dipende dalla simmetria del cono: tutte le sezioni ottenute con piani passanti per l'asse, infatti, sono uguali tra loro. E, ancora, i piani perpendicolari all'asse, e perciò paralleli alla direttrice, tagliano il cono secondo circonferenze simili che possono essere considerate altrettante direttrici della superficie.

5.1.2 Definizioni

Si dicono **coniche** tutte le curve, anche degeneri, che si ottengono sezionando un cono con un piano σ . Queste curve sono:

- la **circonferenza**, quando σ è parallelo al piano della direttrice circolare;
- l'**ellisse** quando σ incontra tutte le generatrici;
- la **parabola** quando σ è parallelo a una generatrice;
- l'**iperbole** quando σ è parallelo a due generatrici distinte;
- una **coppia di rette distinte** incidenti che passano per il vertice V (conica degenera) quando σ passa per il vertice e taglia in due punti la direttrice;
- una **coppia di rette coincidenti** che passano per il vertice V (conica degenera) quando σ passa per il vertice ed è tangente alla superficie, perciò anche alla direttrice;
- il **punto V** (conica degenera), quando σ passa per il vertice e non contiene alcuna generatrice.

5.1.3 Riconoscimento di una sezione conica

Quando si vuole costruire una qualsiasi sezione piana del cono è fondamentale riconoscere il tipo di curva che l'operazione di sezione produrrà, prima ancora di eseguirla. Consideriamo, a questo scopo, un cono obliquo di vertice V e direttrice c (figura 46). Questo cono è tagliato da un qualsiasi piano π , non passante per il vertice, e vogliamo determinare, a priori, quale sarà la conica e generata dalla sezione. Il piano π taglia il piano nel quale giace la direttrice del cono c secondo una retta t .

UC 028 Riconoscimento di una sezione conica

Conduciamo per il vertice V del cono un piano α parallelo al piano di sezione π . Questo piano taglia il piano nel quale giace la direttrice c del cono secondo una retta a . Possono ora darsi tre casi:

- la retta a non ha alcun punto in comune con la direttrice c : la sezione, allora, è un'ellisse;
- la retta a è tangente alla direttrice c , cioè la tocca in un punto: la sezione è una parabola; in questo caso, il punto K appartiene a c e perciò la retta VK è una generatrice del cono;
- la retta a incontra la direttrice c in due punti, R e S : la sezione, allora, è un'iperbole. Le due rette VR e VS sono generatrici del cono.

Per costruire il piano per il vertice V parallelo al piano di sezione si procede come segue:

- si considera una qualsiasi retta p di π perpendicolare alla retta t intersezione del

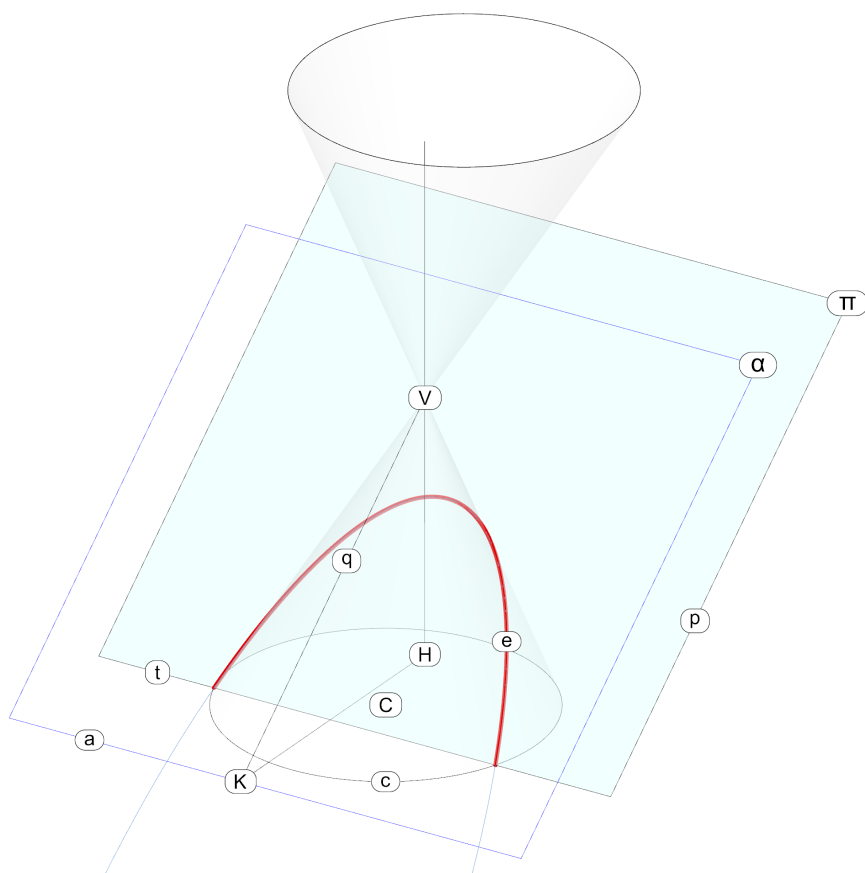


Figura 46 Il riconoscimento della sezione conica che genera un'ellisse

piano di sezione con il piano della direttrice (vedi UC 005;

- si conduce per V la retta q parallela a p , che incontra il piano della direttrice nel punto K ;
- per K si conduce la retta a parallela a t ;
- le rette q e a individuano il piano richiesto.

Si noti, infine, che le due rette q e a sono tra loro perpendicolari essendo parallele a due rette perpendicolari per costruzione.

5.2 Il teorema di Dandelin-Quetelet

Nel 1822 Germinal Pierre Dandelin ha reso noto un teorema che presto è stato adottato in tutti i testi con finalità didattiche per la sua straordinaria chiarezza e semplicità. L'idea è quella di dimostrare, con una particolare architettura tridimensionale, alcune note proprietà dell'ellisse, della parabola e dell'iperbole. In questo modo concetti altrimenti astratti come i fuochi e le direttrici acquistano una particolare evidenza. Bisogna però avvertire che questa elegante costruzione è possibile solo utilizzando il cono circolare retto, o rotondo, e non quello obliquo che risponde alla definizione generale.

5.2.1 Il caso dell'ellisse

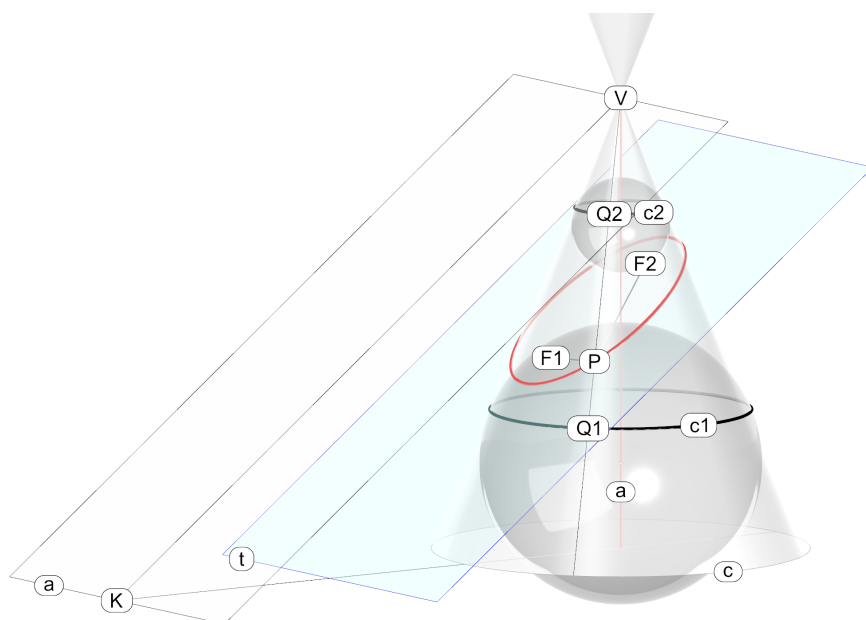


Figura 47 Il teorema di Dandelin nel caso della ellisse: la somma delle distanze di un punto qualsiasi P della curva dai fuochi F_1 e F_2 è costante

Consideriamo il cono rotondo individuato dalla direttrice c e dal vertice V (**figura 47**).

Sezioniamo il cono con un piano, in azzurro nella figura, in modo che incontri tutte le generatrici del cono, per ottenere un'ellisse (vedi **UC 028**). Inscriviamo nel cono due sfere in modo che tocchino la superficie secondo due circonferenze di contatto c_1 e c_2 e il piano di sezione in due punti F_1 e F_2 . Consideriamo infine una qualsiasi generatrice del cono come per esempio quella che, uscendo dal vertice V , tocca c_1 nel punto Q_1 , attraversa l'ellisse nel punto P e c_2 nel punto Q_2 .

Osserviamo ora quanto segue:

- come abbiamo già osservato, quale che sia la generatrice prescelta, la lunghezza del segmento $\overline{Q_1Q_2}$ sarà sempre la stessa;
- i segmenti $\overline{PQ_1}$ e $\overline{PF_1}$ sono uguali perché entrambi condotti da P tangenti alla sfera inferiore;
- e, analogamente, i segmenti $\overline{PQ_2}$ e $\overline{PF_2}$ sono uguali perché entrambi condotti da P tangenti alla sfera superiore;

sicché possiamo affermare che:

$$\overline{PQ_1} + \overline{PQ_2} = k$$

ma dato che:

$$\overline{PQ_1} = \overline{PF_1}, \quad \overline{PQ_2} = \overline{PF_2}$$

risulta che:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = k.$$

E cioè: in una ellisse la somma delle distanze da due punti fissi detti **fuochi** è costante.

Consideriamo ora i due piani paralleli nei quali giacciono le circonferenze di contatto c_1 e c_2 . Questi piani tagliano il piano di sezione secondo due rette d_1 e d_2 che si dicono **direttrici dell'ellisse**. Dato un qualsiasi punto P dell'ellisse, il rapporto tra la sua distanza dal fuoco e la sua distanza dalla direttrice corrispondente è costante e si dice **eccentricità dell'ellisse**¹. Ovviamente la distanza di P dalla direttrice si misura sulla perpendicolare condotta da P alla direttrice medesima.

5.2.2 Il caso della parabola

Consideriamo il cono rotondo di vertice V e direttrice c . Scelta una generatrice VK , conduciamo per K , nel piano della direttrice, la retta a perpendicolare a VK . Le rette VK e a individuano il piano α .

Costruiamo un piano π parallelo ad α e non passante per V . In base al criterio di riconoscimento già stabilito (**UC 028**), la sezione è la parabola p . Inscriviamo nel cono una sfera tangente al piano π nel punto F . La sfera tocca il cono lungo una

¹ Per una dimostrazione geometrica della costanza del rapporto tra le distanze dal fuoco e dalla direttrice, vedi [4, 196–198, § 74].

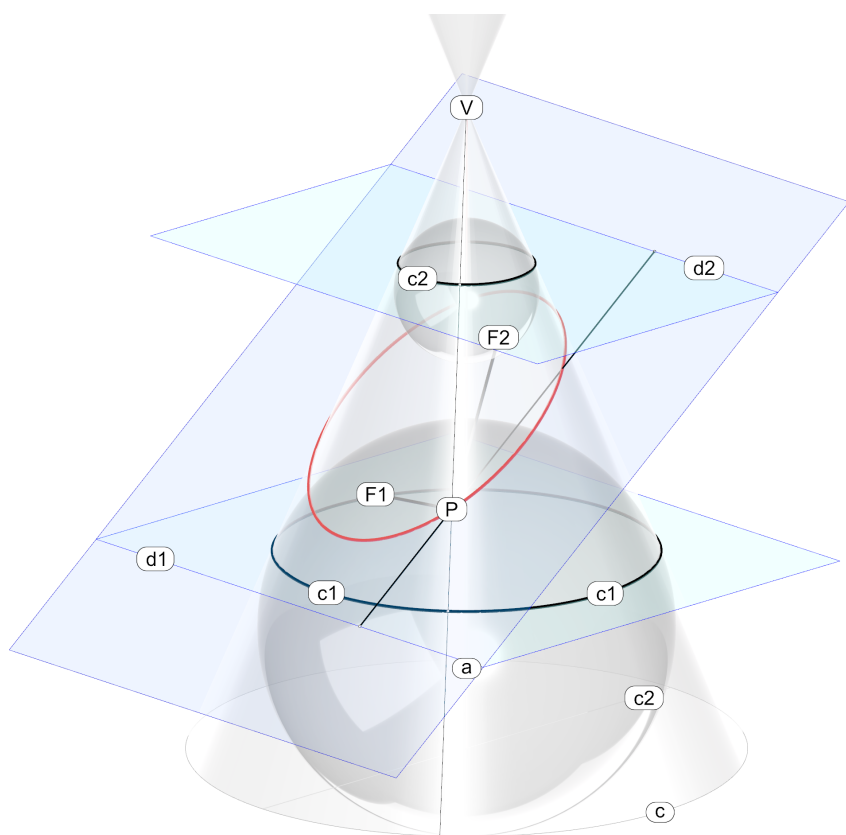


Figura 48 Il teorema di Dandelin nel caso della ellisse: il rapporto tra le distanze di un punto P della curva dal fuoco e dalla direttrice corrispondente è compreso tra 0 e 1

circonferenza c_2 , il cui piano β è parallelo al piano della direttrice c . Indichiamo con d la retta comune a π e β .

Sia P un qualsiasi punto della parabola. La generatrice VP tocca la sfera in Q . Conduciamo per P un piano parallelo a β : esso incontra il cono secondo una circonferenza c_1 . La generatrice VK incontra c_1 in Q_1 e c_2 in Q_2 .

Poiché PF e PQ sono tangenti alla stessa sfera, si ha $PF = PQ$. Le due circonferenze c_1 e c_2 delimitano segmenti uguali su tutte le generatrici del cono rotondo; pertanto $PQ = Q_1Q_2$.

Infine, conduciamo per P la parallela a VK , che incontra d in D . Poiché PD e Q_1Q_2 sono segmenti paralleli, compresi fra gli stessi due piani paralleli, risulta $PD = Q_1Q_2$. Abbiamo dunque:

$$PF = PQ = Q_1Q_2 = PD.$$

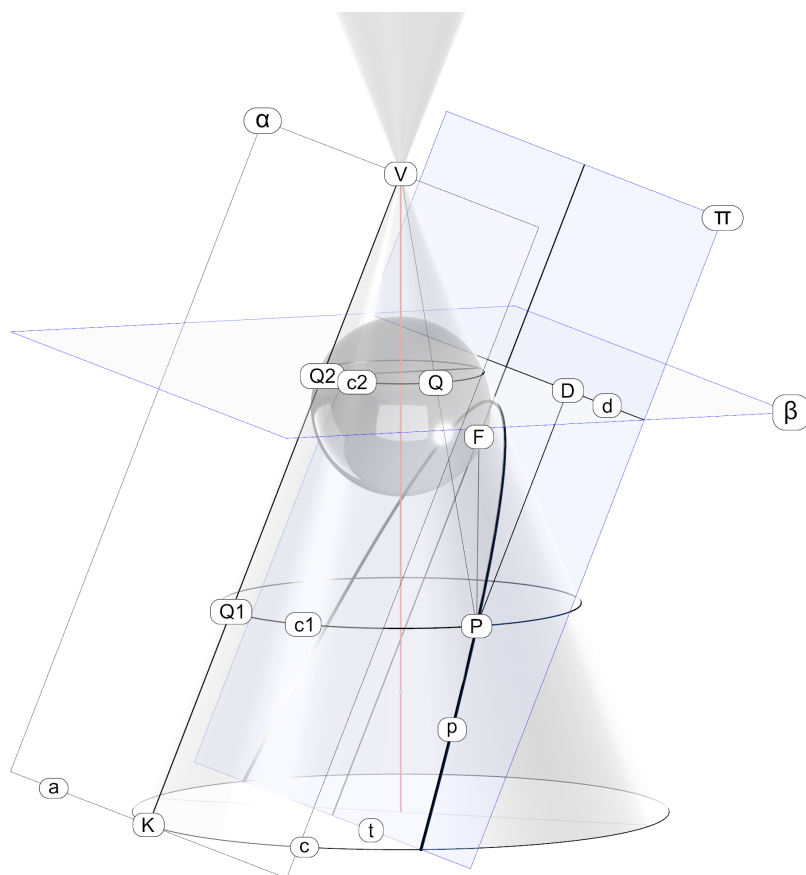


Figura 49 Il teorema di Dandelin applicato alla parabola: ogni suo punto è equidistante dal fuoco F e dalla direttrice d

Ma VK è perpendicolare ad a per costruzione e d è parallela ad a ; pertanto PD è perpendicolare a d . Perciò PD misura la distanza di P dalla retta d , distanza che è uguale a PF .

La parabola può dunque essere descritta come il luogo dei punti del piano equidistanti dal fuoco F e dalla direttrice d .

Dunque, nel caso della parabola, il rapporto delle distanze di un qualsiasi suo punto P dal fuoco e dalla direttrice è pari all'unità e si dice **eccentricità della parabola**.

5.2.3 Il caso dell'iperbole

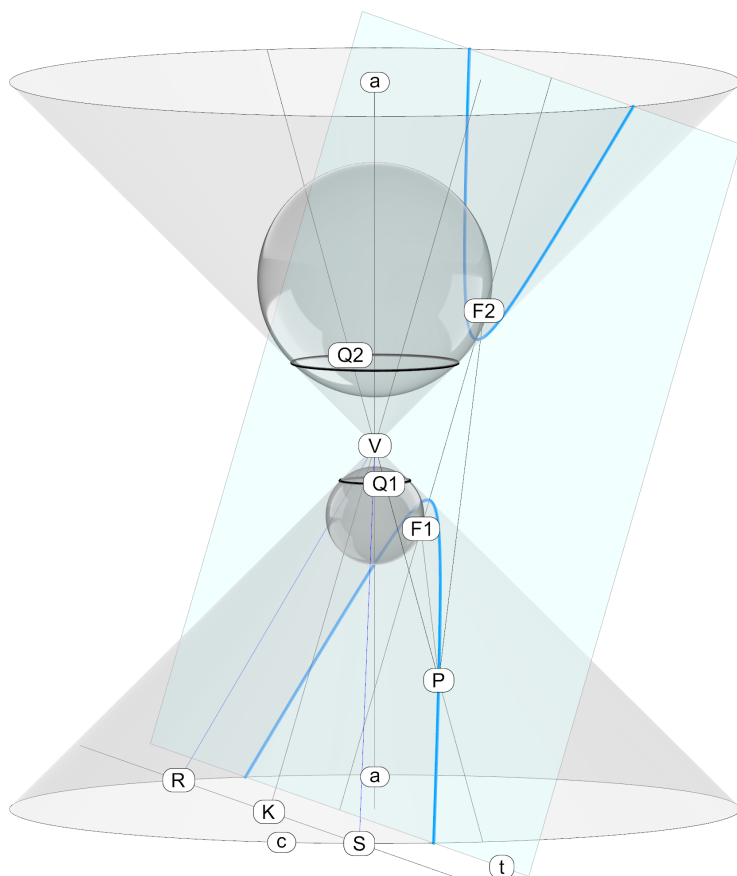


Figura 50 Il teorema di Dandelin applicato all'iperbole: la differenza delle distanze di un punto dai fuochi è costante

Consideriamo infine un cono rotondo la cui direttrice è la circonferenza c e il vertice il punto V . Faremo attenzione, in questo caso, anche alla seconda falda. Costruiamo una retta nel piano della direttrice in modo che la tagli in due punti R e S (figura 50). Costruiamo, ancora, la retta VK perpendicolare alla RS : le due rette così costruite individuano un piano che passa per il vertice del cono e, come sappiamo (UC 028), qualsiasi piano a questo parallelo taglia le due falde del cono secondo i due rami di un'iperbole. Per ragioni che saranno spiegate nella seconda parte, le rette VR e VS sono parallele agli asintoti dell'iperbole generata da questa sezione.

Costruiamo dunque il piano di sezione π parallelo al piano RSV . Questo piano taglia il cono secondo l'iperbole i .

Come già nel caso dell'ellisse, inscriviamo nel cono due sfere, una nella falda inferiore e una nella falda superiore, in modo che tocchino il piano di sezione π nei due punti F_1 e F_2 , rispettivamente.

Consideriamo ora un qualsiasi punto P della curva; la generatrice che passa per P tocca le due sfere nei punti Q_1 e Q_2 . Per le ragioni che abbiamo già illustrato nel caso dell'ellisse si ha che:

$$PF_1 = PQ_1; \quad PF_2 = PQ_2$$

. Ma, quale che sia la scelta di P , la differenza in valore assoluto² delle sue distanze dai punti di contatto delle due sfere inscritte nel cono è costante. Infatti:

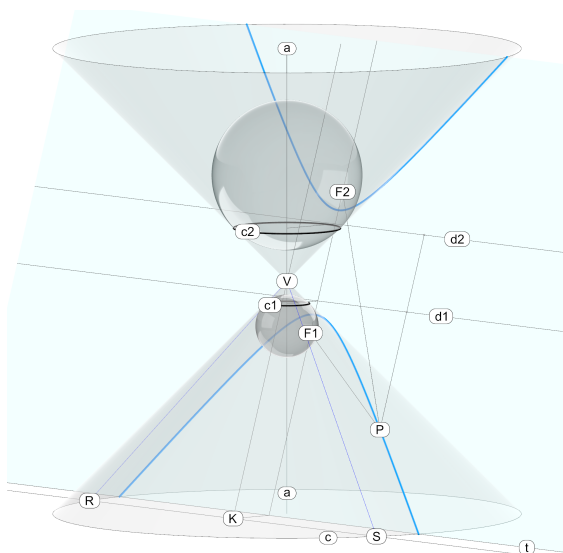
$$Q_1Q_2 = k, \quad |PQ_2 - PQ_1| = Q_1Q_2 = k.$$

E perciò:

$$|PF_2 - PF_1| = k.$$

L'iperbole può dunque essere definita come il luogo geometrico dei punti del piano la differenza, in valore assoluto, delle cui distanze da due punti fissi, detti fuochi, è costante.

Figura 51 Il significato geometrico della eccentricità dell'iperbole nel teorema di Dandelin



Consideriamo infine i due piani nei quali giacciono le circonferenze c_1 e c_2 luogo

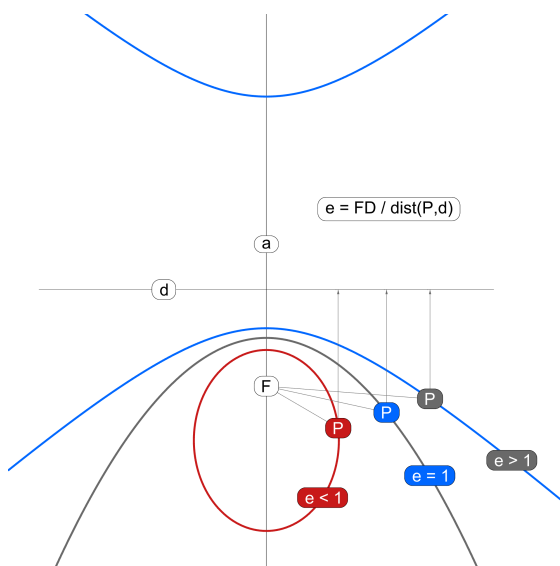
² Questa precisazione è necessaria perché quando il punto P si trova nella seconda falda si inverte l'ordine dei sottraendi.

dei punti di contatto delle due sfere con le falde del cono. Questi due piani tagliano il piano di sezione secondo due rette d_1 e d_2 che sono le direttrici dell'iperbole.

Il rapporto tra le distanze di un qualsiasi punto P dell'iperbole dai fuochi e dalle corrispondenti direttrici è costante e noto come **eccentricità dell'iperbole**.

5.3 Le eccentricità di una conica

Figura 52 Tavola sinottica delle tre coniche principali. Il rapporto tra le distanze di un punto P della curva dal fuoco F e dalla direttrice d distingue le tre coniche principali: nell'ellisse è minore dell'unità, nella parabola uguale, nell'iperbole maggiore.



UC 029 Eccentricità delle sezioni coniche

Fatta eccezione per il cerchio, l'eccentricità è caratteristica di ciascun tipo di sezione conica e precisamente, posto:

$$e = \frac{\overline{PF_1}}{\text{dist}(P, d_1)} = \frac{\overline{PF_2}}{\text{dist}(P, d_2)}$$

può assumere i seguenti valori:

- nell'ellisse è compresa tra 0 e 1, $0 < e < 1$;
- nella circonferenza è uguale a zero, $e = 0$;
- nella parabola è uguale all'unità, $e = 1$;
- nell'iperbole è maggiore dell'unità, $e > 1$;

5.4 Conica che passa per cinque punti dati

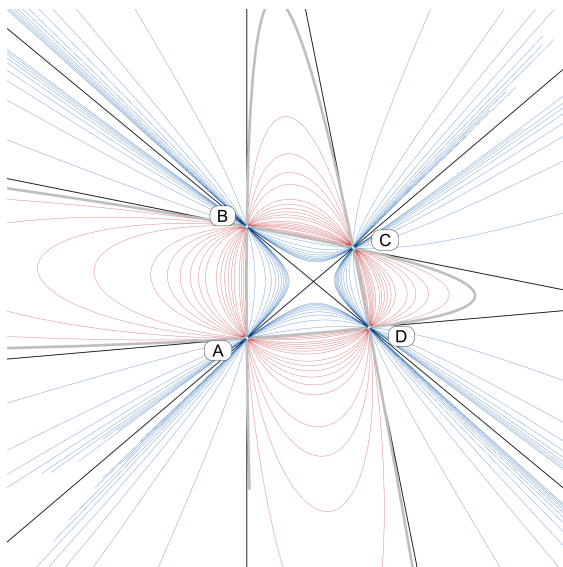
UC 030 Quanti punti determinano una conica?

Cinque punti, purché non ve ne siano tre allineati, determinano una conica. La costruzione della conica che passa per cinque punti può farsi per via grafica (vedi seconda parte) o per via analitica.

Perché cinque punti, a tre a tre non allineati, individuano una conica, e non di meno, e non di più? Si può rispondere a questa domanda almeno tre modi, secondo l'intuito, secondo la geometria analitica e infine utilizzando la geometria proiettiva, ma quest'ultima spiegazione utilizza lo spazio come appare, non lo spazio euclideo, e perciò viene data nella seconda parte (vedi ****).

Risposta basata sull'intuizione

Figura 53 Fascio di coniche definito da quattro punti base: in rosso le ellissi, in blu le iperboli, in grigio le parabole



Dati quattro punti A, B, C, D nel piano esiste un *fascio di coniche* che passano tutte per quei punti, detti *punti base del fascio*, e circoscrivono il quadrangolo $ABCD$. Per ogni altro punto del piano passa una, ed una sola conica del fascio [1, pp. 384–388]. I lati opposti del quadrangolo:

$$AB, CD; AC, BD; AD, BC$$

sono le coniche degeneri del fascio. È perciò evidente che, per individuare una qualsiasi conica, è necessario un quinto punto che la determina univocamente.

Risposta basata sulla geometria analitica

L'equazione generale di una conica è

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

dove a, b, c, d, e, f sono costanti. Tuttavia la forma della curva non dipende dal valore di questi coefficienti ma dai loro mutui rapporti. Se moltiplichiamo o dividiamo questi coefficienti per una costante non nulla, la curva non cambia. Perciò, se dividiamo i sei suddetti coefficienti per f , otteniamo l'equazione:

$$\frac{a}{f}x^2 + \frac{b}{f}xy + \frac{c}{f}y^2 + \frac{d}{f}x + \frac{e}{f}y + 1 = 0.$$

che richiede solo cinque condizioni, ovvero cinque punti per essere determinata³.

Lo strumento che ci consente di disegnare la conica passante per cinque punti dati è uno script scritto in Python che si può scaricare usando il link riportato a margine. Il medesimo script permette inoltre di approssimare un insieme di più di cinque punti con un tipo di conica scelto dall'utente e di calcolare gli scarti, cioè le distanze residue tra la curva ottenuta e i punti dati. Perciò, nel caso in cui sia difficile stimare a vista se la curva sia, per esempio, un'ellisse o una curva composta di archi di circonferenza, il rapporto stampato alla fine dell'elaborazione permette di valutare accuratamente quale sia la curva che più si avvicina a quella osservata.

**Python
Library**

Questo script si serve delle librerie Python di Rhinoceros, ma può essere facilmente implementato in qualsiasi altro ambiente di computer grafica, grazie alla descrizione che segue.

5.4.1 L'equazione

L'equazione generale di una conica può scriversi nella forma

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

I coefficienti

$$a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$$

sono le quantità che debbono essere determinate per ottenere che la curva passi esattamente per i punti dati.

³ Cfr. George Salmon [3, p. 136]

Supponiamo che siano dati nel piano i cinque punti

$$A(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2), \quad C(x_3, y_3), \quad D(x_4, y_4), \quad E(x_5, y_5).$$

Poiché il punto A appartiene alla conica, le sue coordinate devono soddisfarne l'equazione. Sostituendo quindi $x = x_1$ e $y = y_1$ otteniamo

$$x_1^2 a_{11} + 2x_1 y_1 a_{12} + y_1^2 a_{22} + 2x_1 a_{13} + 2y_1 a_{23} + a_{33} = 0.$$

In questa equazione x_1 e y_1 sono quantità note, mentre i sei coefficienti a_{ij} sono le incognite.

Ripetendo la stessa operazione per gli altri quattro punti si ottiene un sistema di cinque equazioni lineari in sei incognite:

$$\begin{cases} x_1^2 a_{11} + 2x_1 y_1 a_{12} + y_1^2 a_{22} + 2x_1 a_{13} + 2y_1 a_{23} + a_{33} = 0, \\ x_2^2 a_{11} + 2x_2 y_2 a_{12} + y_2^2 a_{22} + 2x_2 a_{13} + 2y_2 a_{23} + a_{33} = 0, \\ x_3^2 a_{11} + 2x_3 y_3 a_{12} + y_3^2 a_{22} + 2x_3 a_{13} + 2y_3 a_{23} + a_{33} = 0, \\ x_4^2 a_{11} + 2x_4 y_4 a_{12} + y_4^2 a_{22} + 2x_4 a_{13} + 2y_4 a_{23} + a_{33} = 0, \\ x_5^2 a_{11} + 2x_5 y_5 a_{12} + y_5^2 a_{22} + 2x_5 a_{13} + 2y_5 a_{23} + a_{33} = 0. \end{cases}$$

Lo stesso sistema può essere scritto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & 2x_1 y_1 & y_1^2 & 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ x_2^2 & 2x_2 y_2 & y_2^2 & 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ x_3^2 & 2x_3 y_3 & y_3^2 & 2x_3 & 2y_3 & 1 \\ x_4^2 & 2x_4 y_4 & y_4^2 & 2x_4 & 2y_4 & 1 \\ x_5^2 & 2x_5 y_5 & y_5^2 & 2x_5 & 2y_5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La prima matrice contiene soltanto quantità note, ricavate dalle coordinate dei cinque punti; la seconda contiene invece i sei coefficienti incogniti dell'equazione della conica.

A questo punto sorge una domanda naturale: come possiamo ricavare sei coefficienti da sole cinque equazioni? Possiamo evitare di determinare separatamente i sei coefficienti introducendo un sesto punto

$$P(x, y),$$

le cui coordinate non sono note, ma variano nel piano. Se anche P appartiene alla conica, le sue coordinate devono soddisfare la stessa equazione:

$$x^2 a_{11} + 2xy a_{12} + y^2 a_{22} + 2xa_{13} + 2ya_{23} + a_{33} = 0.$$

Alle cinque equazioni corrispondenti ai punti dati se ne aggiunge così una sesta, relativa al punto variabile P : [2, pp. 386–390]

$$\begin{cases} x^2 a_{11} + 2xy a_{12} + y^2 a_{22} + 2xa_{13} + 2ya_{23} + a_{33} = 0, \\ x_1^2 a_{11} + 2x_1 y_1 a_{12} + y_1^2 a_{22} + 2x_1 a_{13} + 2y_1 a_{23} + a_{33} = 0, \\ x_2^2 a_{11} + 2x_2 y_2 a_{12} + y_2^2 a_{22} + 2x_2 a_{13} + 2y_2 a_{23} + a_{33} = 0, \\ x_3^2 a_{11} + 2x_3 y_3 a_{12} + y_3^2 a_{22} + 2x_3 a_{13} + 2y_3 a_{23} + a_{33} = 0, \\ x_4^2 a_{11} + 2x_4 y_4 a_{12} + y_4^2 a_{22} + 2x_4 a_{13} + 2y_4 a_{23} + a_{33} = 0, \\ x_5^2 a_{11} + 2x_5 y_5 a_{12} + y_5^2 a_{22} + 2x_5 a_{13} + 2y_5 a_{23} + a_{33} = 0. \end{cases}$$

Abbiamo ora sei equazioni nelle stesse sei incognite

$$a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}.$$

Cerchiamo le posizioni del punto P per le quali il sistema ammette coefficienti $a_{11} \dots a_{33}$ non tutti nulli. Perché il punto P appartenga alla stessa conica dei cinque punti dati, le sei equazioni devono poter essere soddisfatte dagli stessi sei coefficienti

$$a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}.$$

Questa condizione può essere espressa raccogliendo in una matrice i coefficienti delle sei equazioni. Il punto P appartiene alla conica quando il determinante di questa matrice è nullo: Le coordinate dei cinque punti dati sono quantità note; le sole variabili sono quindi x e y , cioè le coordinate del punto P . Sviluppando il determinante si ottiene un'equazione di secondo grado in x e y : essa è precisamente l'equazione della conica che passa per i cinque punti dati. L'implementazione introduce inoltre alcuni accorgimenti di natura computazionale, necessari per rendere il calcolo stabile e applicabile anche a configurazioni particolari. Questi accorgimenti non modificano però il principio seguito: dalle coordinate dei cinque punti si costruiscono le equazioni che consentono di determinare i coefficienti dell'equazione generale della

conica⁴.

5.4.2 Il riconoscimento della conica

Dopo avere determinato l'equazione della conica, è possibile riconoscerne il tipo e cioè se si tratti di una circonferenza, di un'ellisse, di una parabola, di un'iperbole. Ricordiamo anzitutto che, per un'equazione di secondo grado in una variabile

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

le soluzioni sono date dalla formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La quantità

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

è detta *discriminante*, proprio perché il suo segno distingue i diversi casi possibili. Una quantità analoga compare nell'equazione generale della conica

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Considerando la sua parte quadratica

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

si può dunque definire il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

⁴ Il passaggio dai cinque punti ai coefficienti dell'equazione della conica è svolto nello script nei seguenti gruppi di righe:

- **righe 265–274:** vengono calcolati il centro medio dei punti e una scala di riferimento; le coordinate sono quindi normalizzate per rendere il calcolo numericamente più stabile;
- **righe 276–284:** per ogni punto viene costruita la riga $[x^2, xy, y^2, x, y, 1]$, corrispondente ai termini dell'equazione generale

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0;$$

queste righe vengono utilizzate per costruire la matrice del sistema;

- **righe 286–289:** dalla matrice vengono ricavati i sei coefficienti dell'equazione, determinati nei loro rapporti reciproci, e il relativo vettore viene normalizzato;
- **riga 290:** i coefficienti vengono riportati dal sistema normalizzato al sistema di coordinate locale del disegno.

Gli accorgimenti numerici impiegati non modificano il principio geometrico e algebrico esposto nel testo: ciascuno dei cinque punti fornisce una equazione lineare nei coefficienti della conica.

Il segno di Δ permette di riconoscere il tipo di curva (purché la conica non sia degenere):

$\Delta < 0 \Rightarrow$ ellisse o circonferenza,

$\Delta = 0 \Rightarrow$ parabola,

$\Delta > 0 \Rightarrow$ iperbole.

Questa legge esprime un carattere delle sezioni coniche che è noto dall'antichità e che conferisce loro un nome: infatti ellisse (ἑλλειψις) sta per «mancanza», parabola (παράβολή) significa anche «confronto» o «paragone» e iperbole (ὑπερβολή) «eccesso».

Prima di applicare questa classificazione lo script verifica inoltre che la conica non sia degenere; distingue poi la circonferenza dall'ellisse mediante un ulteriore confronto tra i coefficienti quadratici⁵.

5.4.3 Il disegno della curva

Dopo aver determinato l'equazione della conica e aver riconosciuto di che tipo si tratta, è possibile disegnarla. Lo script utilizza a questo scopo le NURBS, curve disponibili nei principali sistemi di computer grafica, con le quali le coniche possono essere tracciate con esattezza.

Si considerano, però, due situazioni diverse. Se i punti dati sono cinque, essi determinano, salvo i casi degeneri, una conica che passa esattamente per tutti e cinque: si tratta quindi di una *interpolazione*. Se invece i punti sono più di cinque, in generale non esiste una sola conica che passi esattamente per tutti. Lo script costruisce allora una conica di migliore *approssimazione*, cercando di ridurre quanto possibile gli scarti rispetto ai punti dati.

Questa seconda possibilità può essere particolarmente utile quando si vuole interpretare geometricamente un profilo rilevato. Consideriamo, per esempio, il profilo di un arco: è parte di un'ellisse, di una circonferenza, oppure appartiene a un profilo ovale costruito con archi di circonferenza? Per formulare un'ipotesi attendibile non basta osservare visivamente la curva. Occorre confrontare gli scarti prodotti dalle diverse interpretazioni rispetto ai punti rilevati. Per questo lo script calcola queste distanze e genera un rapporto numerico che consente di valutare accuratamente quale sia la curva che più si avvicina a quella osservata.

Torniamo però al disegno. Una conica è una curva algebrica di secondo grado

⁵ Il riconoscimento del tipo di conica è svolto nello script nelle righe 562–605:

- **righe 562–566:** vengono letti i coefficienti dell'equazione e calcolato il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$;
- **righe 568–593:** vengono calcolate alcune quantità aggiuntive utilizzate per verificare la stabilità numerica e riconoscere eventuali casi degeneri;
- **righe 598–605:** il segno del discriminante viene utilizzato per distinguere parabola, ellisse e iperbole.

e può essere rappresentata esattamente da una NURBS quadratica. Lo script determina quindi i punti di controllo e i relativi pesi che consentono alla NURBS di rappresentare la conica descritta dall'equazione generale⁶.



Figura 54 Analisi del profilo di un arco: la curva costruita per cinque punti, un'ellisse, è messa a confronto con la curva di approssimazione costruita su un ricco campione di punti

Bibliografia

1. Guido Castelnuovo. *Lezioni di Geometria Analitica. Geometria analitica ... - ... geometria proiettiva - Curve e superfici ...* Sedicesima Edizione della prima del 1903. Milano-Roma-Napoli-Città di Castello: Società Dante Alighieri, 1968.
2. Oscar Chisini. *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva*. Bologna: Zanichelli, 1967.

⁶ Nello script queste operazioni sono distribuite in più gruppi di righe: alle righe 265–307 viene determinata la conica implicita e, nel caso di più di cinque punti, la migliore approssimazione algebrica; alle righe 702–757 sono ricavati, quando necessario, i dati della rappresentazione razionale della conica, cioè il punto di controllo intermedio e il relativo peso, e viene costruita la NURBS quadratica; alle righe 1061–1069 viene richiamata la procedura di disegno corrispondente al tipo di conica; alle righe 1102–1138 vengono calcolate le distanze tra i punti assegnati e la curva ottenuta, dalle quali derivano gli scarti riportati nella relazione numerica.

3. George Salmon. *A Treatise on Conic Sections: Containing an Account of Some of the Most Important Modern Algebraic and Geometric Methods*. 10^a ed. London, New York e Bombay: Longmans, Green, e Co., 1896.
4. Charles Taylor. *An Introduction to the Ancient and Modern Geometry of Conics*. Cambridge: Deighton, Bell e Co., 1881.

Indice dei nomi citati

Dandelin, Germinal Pierre, 69

Salmon, George, 77

Indice delle Unità Concettuali

Conica per cinque punti.SE, 76

Eccentricità delle coniche.SE, 75

Riconoscimento di una conica.SE, 67