

## Capitolo 5

### Le sezioni coniche

#### 5.1 Conica che passa per cinque punti dati

Lo strumento che ci consente di disegnare la conica passante per cinque punti dati è uno script scritto in Python che si può scaricare usando il link riportato a margine. Il medesimo script permette inoltre di approssimare un insieme di più di cinque punti con un tipo di conica scelto dall'utente e di calcolare gli scarti, cioè le distanze residue tra la curva ottenuta e i punti dati. Perciò, nel caso in cui sia difficile stimare a vista se la curva sia, per esempio, un'ellisse o una curva composta di archi di circonferenza, il rapporto stampato alla fine dell'elaborazione permette di valutare accuratamente quale sia la curva che più si avvicina a quella osservata.

**Python Library**

Questo script si serve delle librerie Python di Rhinoceros, ma può essere facilmente implementato in qualsiasi altro ambiente di computer grafica, grazie alla descrizione che segue.

##### 5.1.1 Equazione

L'equazione generale di una conica può scriversi nella forma

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

I coefficienti

$$a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$$

sono le quantità che debbono essere determinate per ottenere che la curva passi esattamente per i punti dati.

Supponiamo che siano dati nel piano i cinque punti

$$A(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2), \quad C(x_3, y_3), \quad D(x_4, y_4), \quad E(x_5, y_5).$$

Poiché il punto  $A$  appartiene alla conica, le sue coordinate devono soddisfarne l'equa-

zione. Sostituendo quindi  $x = x_1$  e  $y = y_1$  otteniamo

$$x_1^2 a_{11} + 2x_1 y_1 a_{12} + y_1^2 a_{22} + 2x_1 a_{13} + 2y_1 a_{23} + a_{33} = 0.$$

In questa equazione  $x_1$  e  $y_1$  sono quantità note, mentre i sei coefficienti  $a_{ij}$  sono le incognite.

Ripetendo la stessa operazione per gli altri quattro punti si ottiene un sistema di cinque equazioni lineari in sei incognite:

$$\begin{cases} x_1^2 a_{11} + 2x_1 y_1 a_{12} + y_1^2 a_{22} + 2x_1 a_{13} + 2y_1 a_{23} + a_{33} = 0, \\ x_2^2 a_{11} + 2x_2 y_2 a_{12} + y_2^2 a_{22} + 2x_2 a_{13} + 2y_2 a_{23} + a_{33} = 0, \\ x_3^2 a_{11} + 2x_3 y_3 a_{12} + y_3^2 a_{22} + 2x_3 a_{13} + 2y_3 a_{23} + a_{33} = 0, \\ x_4^2 a_{11} + 2x_4 y_4 a_{12} + y_4^2 a_{22} + 2x_4 a_{13} + 2y_4 a_{23} + a_{33} = 0, \\ x_5^2 a_{11} + 2x_5 y_5 a_{12} + y_5^2 a_{22} + 2x_5 a_{13} + 2y_5 a_{23} + a_{33} = 0. \end{cases}$$

Lo stesso sistema può essere scritto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & 2x_1 y_1 & y_1^2 & 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ x_2^2 & 2x_2 y_2 & y_2^2 & 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ x_3^2 & 2x_3 y_3 & y_3^2 & 2x_3 & 2y_3 & 1 \\ x_4^2 & 2x_4 y_4 & y_4^2 & 2x_4 & 2y_4 & 1 \\ x_5^2 & 2x_5 y_5 & y_5^2 & 2x_5 & 2y_5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La prima matrice contiene soltanto quantità note, ricavate dalle coordinate dei cinque punti; la seconda contiene invece i sei coefficienti incogniti dell'equazione della conica.

A questo punto sorge una domanda naturale: come possiamo ricavare sei coefficienti da sole cinque equazioni?

A questo punto sorge una domanda naturale: come possiamo ricavare sei coefficienti da sole cinque equazioni? Possiamo evitare di determinare separatamente i sei coefficienti introducendo un sesto punto

$$P(x, y),$$

le cui coordinate non sono note, ma variano nel piano. Se anche  $P$  appartiene alla conica, le sue coordinate devono soddisfare la stessa equazione:

$$x^2 a_{11} + 2xy a_{12} + y^2 a_{22} + 2x a_{13} + 2y a_{23} + a_{33} = 0.$$

Alle cinque equazioni corrispondenti ai punti dati se ne aggiunge così una sesta, relativa al punto variabile  $P$ : [1, pp. 386–390]

$$\begin{cases} x^2a_{11} + 2xya_{12} + y^2a_{22} + 2xa_{13} + 2ya_{23} + a_{33} = 0, \\ x_1^2a_{11} + 2x_1y_1a_{12} + y_1^2a_{22} + 2x_1a_{13} + 2y_1a_{23} + a_{33} = 0, \\ x_2^2a_{11} + 2x_2y_2a_{12} + y_2^2a_{22} + 2x_2a_{13} + 2y_2a_{23} + a_{33} = 0, \\ x_3^2a_{11} + 2x_3y_3a_{12} + y_3^2a_{22} + 2x_3a_{13} + 2y_3a_{23} + a_{33} = 0, \\ x_4^2a_{11} + 2x_4y_4a_{12} + y_4^2a_{22} + 2x_4a_{13} + 2y_4a_{23} + a_{33} = 0, \\ x_5^2a_{11} + 2x_5y_5a_{12} + y_5^2a_{22} + 2x_5a_{13} + 2y_5a_{23} + a_{33} = 0. \end{cases}$$

Abbiamo ora sei equazioni nelle stesse sei incognite

$$a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}.$$

Cerchiamo le posizioni del punto  $P$  per le quali il sistema ammette coefficienti  $a_{11} \dots a_{33}$  non tutti nulli. Perché il punto  $P$  appartenga alla stessa conica dei cinque punti dati, le sei equazioni devono poter essere soddisfatte dagli stessi sei coefficienti

$$a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}.$$

Questa condizione può essere espressa raccogliendo in una matrice i coefficienti delle sei equazioni. Il punto  $P$  appartiene alla conica quando il determinante di questa matrice è nullo: Le coordinate dei cinque punti dati sono quantità note; le sole variabili sono quindi  $x$  e  $y$ , cioè le coordinate del punto  $P$ . Sviluppando il determinante si ottiene un'equazione di secondo grado in  $x$  e  $y$ : essa è precisamente l'equazione della conica che passa per i cinque punti dati.

L'implementazione introduce inoltre alcuni accorgimenti di natura computazionale, necessari per rendere il calcolo stabile e applicabile anche a configurazioni particolari. Questi accorgimenti non modificano però il principio seguito: dalle coordinate dei cinque punti si costruiscono le equazioni che consentono di determinare i coefficienti dell'equazione generale della conica<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Il passaggio dai cinque punti ai coefficienti dell'equazione della conica è svolto nello script nei seguenti gruppi di righe:

- **righe 265–274**: vengono calcolati il centro medio dei punti e una scala di riferimento; le coordinate sono quindi normalizzate per rendere il calcolo numericamente più stabile;
- **righe 276–284**: per ogni punto viene costruita la riga

$$[x^2, xy, y^2, x, y, 1],$$

corrispondente ai termini dell'equazione generale

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0;$$

queste righe vengono utilizzate per costruire la matrice del sistema;

- **righe 286–289**: dalla matrice vengono ricavati i sei coefficienti dell'equazione, determinati nei loro rapporti reciproci, e il relativo vettore viene normalizzato;
- **riga 290**: i coefficienti vengono riportati dal sistema normalizzato al sistema di coordinate locale del disegno.

Gli accorgimenti numerici impiegati non modificano il principio geometrico e algebrico esposto nel testo: ciascuno dei cinque punti fornisce una equazione lineare nei coefficienti della conica.

### 5.1.2 Riconoscimento della conica

Dopo avere determinato l'equazione della conica, è possibile riconoscerne il tipo e cioè se si tratti di una circonferenza, di un'ellisse, di una parabola, di un'iperbole. Ricordiamo anzitutto che, per un'equazione di secondo grado in una variabile

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

le soluzioni sono date dalla formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La quantità

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

è detta *discriminante*, proprio perché il suo segno distingue i diversi casi possibili. Una quantità analoga compare nell'equazione generale della conica

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Considerando la sua parte quadratica

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

si può dunque definire il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Il segno di  $\Delta$  permette di riconoscere il tipo di curva:

$$\Delta < 0 \Rightarrow \text{ellisse o circonferenza,}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \text{parabola,}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \text{iperbole.}$$

Questa legge esprime un carattere delle sezioni coniche che è noto dall'antichità e che conferisce loro un nome: infatti ellisse (ἑλλειψις) sta per «mancanza», parabola (παράβολή) significa anche «confronto» o «paragone» e iperbole (ὑπεράβολή) «eccesso».

Prima di applicare questa classificazione lo script verifica inoltre che la conica non sia degenere; distingue poi la circonferenza dall'ellisse mediante un ulteriore confronto tra i coefficienti quadratici<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Il riconoscimento del tipo di conica è svolto nello script nelle righe 562–605:

- **righe 562–566:** vengono letti i coefficienti dell'equazione e calcolato il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac;$$

- **righe 568–593:** vengono calcolate alcune quantità aggiuntive utilizzate per verificare la stabilità

UC storica sull'argomento

Scrivere una UC storica per mostrare l'analogia tra la teoria di Apollonio e quella contemporanea quanto al riconoscimento delle curve

### 5.1.3 Il disegno della curva

Dopo aver determinato l'equazione della conica e aver riconosciuto di che tipo si tratta, è possibile disegnarla. Lo script utilizza a questo scopo le NURBS, curve disponibili nei principali sistemi di computer grafica, con le quali le coniche possono essere tracciate con esattezza.

Si considerano, però, due situazioni diverse. Se i punti dati sono cinque, essi determinano, salvo i casi degeneri, una conica che passa esattamente per tutti e cinque: si tratta quindi di una *interpolazione*. Se invece i punti sono più di cinque, in generale non esiste una sola conica che passi esattamente per tutti. Lo script costruisce allora una conica di migliore *approssimazione*, cercando di ridurre quanto possibile gli scarti rispetto ai punti dati.

Questa seconda possibilità può essere particolarmente utile quando si vuole interpretare geometricamente un profilo rilevato. Consideriamo, per esempio, il profilo di un arco: è parte di un'ellisse, di una circonferenza, oppure appartiene a un profilo ovale costruito con archi di circonferenza? Per formulare un'ipotesi attendibile non basta osservare visivamente la curva. Occorre confrontare gli scarti prodotti dalle diverse interpretazioni rispetto ai punti rilevati. Per questo lo script calcola queste distanze e genera un rapporto numerico che consente di valutare accuratamente quale sia la curva che più si avvicina a quella osservata.

Torniamo però al disegno. Una conica è una curva algebrica di secondo grado e può essere rappresentata esattamente da una NURBS quadratica. Lo script determina quindi i punti di controllo e i relativi pesi che consentono alla NURBS di rappresentare la conica descritta dall'equazione generale<sup>3</sup>.

---

numerica e riconoscere eventuali casi degeneri;

- **righe 598–605:** il segno del discriminante viene utilizzato per distinguere parabola, ellisse e iperbole.

<sup>3</sup> Nello script queste operazioni sono distribuite in più gruppi di righe: alle righe 265–307 viene determinata la conica implicita e, nel caso di più di cinque punti, la migliore approssimazione algebrica; alle righe 702–757 sono ricavati, quando necessario, i dati della rappresentazione razionale della conica, cioè il punto di controllo intermedio e il relativo peso, e viene costruita la NURBS quadratica; alle righe 1061–1069 viene richiamata la procedura di disegno corrispondente al tipo di conica; alle righe 1102–1138 vengono calcolate le distanze tra i punti assegnati e la curva ottenuta, dalle quali derivano gli scarti riportati nella relazione numerica.