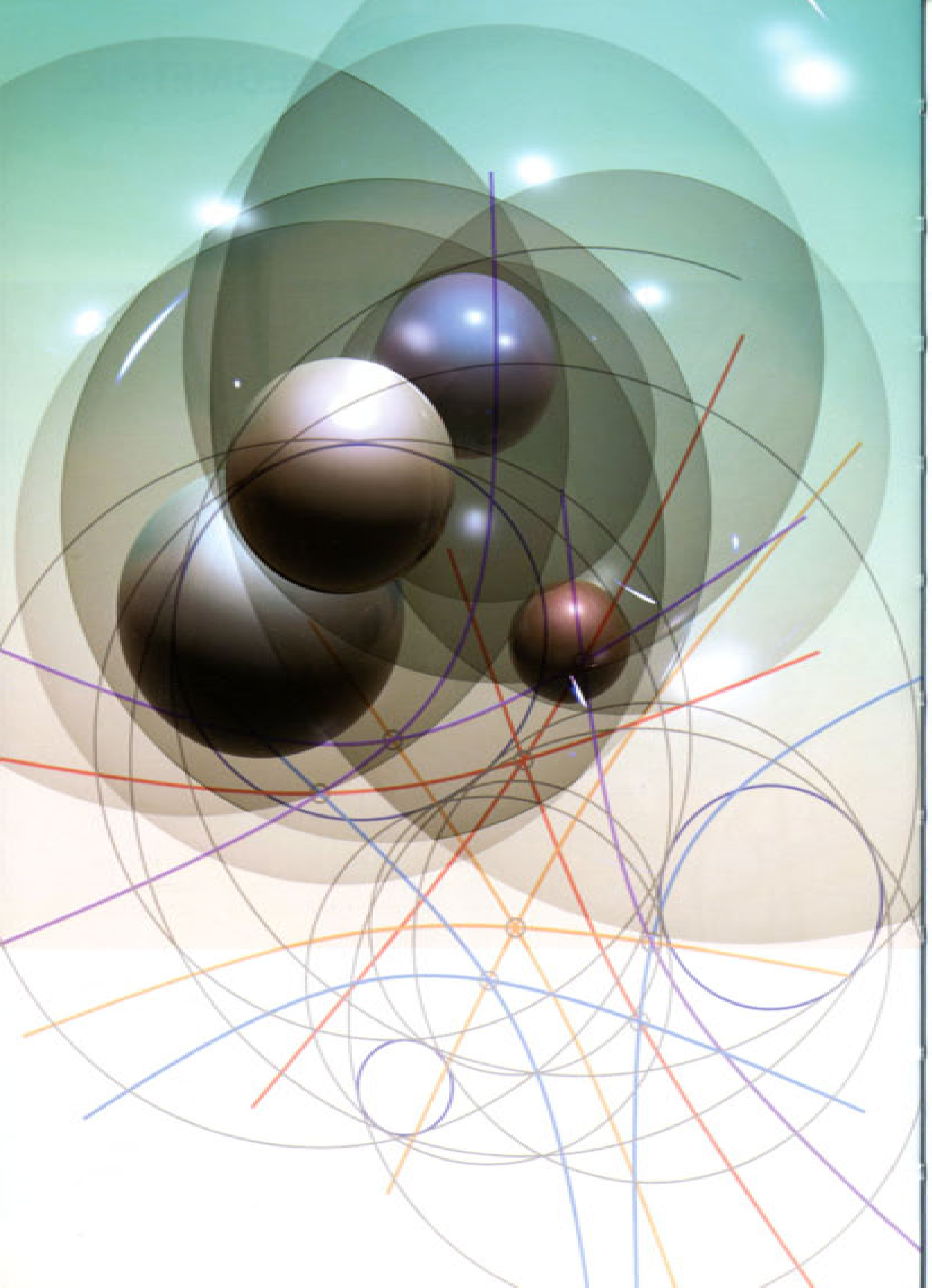

La geometria descrittiva nell'era informatica

Riccardo Migliari

Prima ancora di entrare nell'argomento, mi sembra indispensabile chiarire che cosa intendo quando scrivo 'geometria descrittiva'.
È legittimo, infatti, associare questa espressione al nome di Gaspard Monge, che l'ha coniata, e perciò anche i contenuti di questa scienza ai contenuti delle trattazioni di Monge stesso e della sua scuola. Questi contenuti, tuttavia, non rappresentano l'intero patrimonio della scienza e dell'arte di rappresentare gli oggetti a tre dimensioni. Tutti sappiamo, ad esempio, quale modesto e dimesso ruolo vi abbiano la prospettiva e la teoria delle ombre e del chiaroscuro. Perciò, quando parlo di geometria descrittiva intendo non solo quella insegnata da Monge, ma quella prima ancora insegnata da Piero della Francesca, da Guidoubaldo del Monte, Girard Desargues, da Brook Taylor, da Amédée Francois Frézier e poi ancora, da Wilhelm Fiedler e Edmond Brunhes, per citare solo alcuni nomi, i primi che mi vengono a mente, in quell'affollato ritratto che celebra la storia della nostra scienza.
Ciò premesso, possiamo affermare che, da tempo immemorabile, la geometria descrittiva è un insostituibile strumento del progetto: essa è sintesi di arte, scienza e tecnica, come i mestieri nei quali trova applicazione.
L'aspetto scientifico della geometria descrittiva si manifesta soprattutto nella teoria, come quello di qualsiasi scienza, mentre l'aspetto artistico e tecnico si palesa nelle applicazioni.
La multiforme varietà dei contributi che compongono il corpus attuale della disciplina, deriva dalla corrispondente varietà degli Autori: grandi artisti, matematici, fisici e ingegneri; ed esprime la sintesi, unica nel panorama delle scienze, che ho sopra ricordato.
Dalla seconda metà del Novecento, tuttavia, il compito di sviluppare, insegnare e conservare questo patrimonio di cultura è quasi esclusivamente riservato agli architetti e, perciò, la geometria descrittiva è tra le poche discipline scientifiche di loro esclusiva competenza.
Osservando questo quadro, si può anche notare come la geometria descrittiva si sia accresciuta di nuove scoperte e perfezionamenti fino, all'incirca, all'inizio del secolo scorso, per poi riposare in uno stato che definirei conservativo, fatte salve pochissime eccezioni. Tra la fine dell'Ottocento e i primi del Novecento si collocano due contributi che ritengo fondamentali, perché manifestano, precocemente, una istanza di rinnovamento e, con essa, il bisogno di continuare una evoluzione che si avvertiva ormai stanca.
Il primo di questi contributi si deve a Wilhelm Fiedler: il suo trattato[1], profondamente innovativo, propone una nuova visione dei metodi di rappresentazione che sono collocati tutti nell'ambito della prospettiva, della quale costituiscono altrettanti casi particolari.

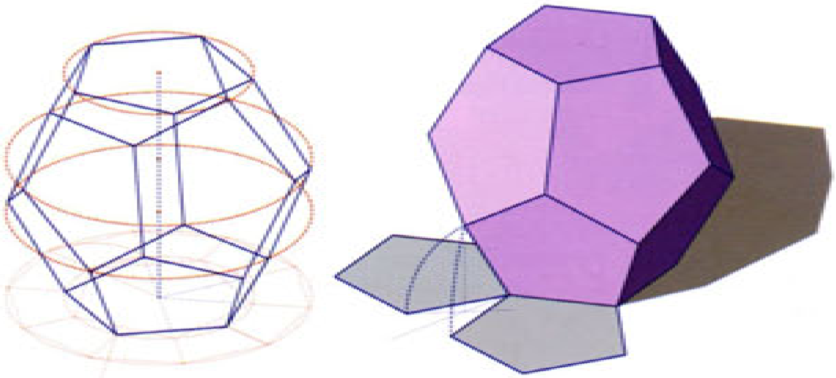

Fig. 1

Il secondo contributo è invece di Brunhes, fratello lasalliano che, all'uso della scuola cui appartiene, firma le sue opere con le iniziali del superiore e solo in ultimo, divenuto superiore egli stesso, con le iniziali F.G.M. (Fratel Gabriel Marie)[2]. Brunhes identifica alcune criticità della geometria descrittiva del suo tempo: la mancanza di unificazione nella terminologia, la presenza, conseguente, di locuzioni circonvolute, l'insufficiente importanza attribuita alla lettura e alla immaginazione dello spazio, la ricerca di nuove soluzioni; la ricerca di possibili semplificazioni. E, a riguardo, presenta alcune proposte come l'uso degli aggettivi 'frontale' e 'orizzontale' per definire rapidamente la giacitura di piani, l'uso del contorno apparente nella soluzione di alcuni problemi di tangenza, e l'abolizione delle tracce nella rappresentazione dei piani. Come tutti sappiamo, ancora oggi non tutte queste raccomandazioni sono state accolte.

Dicevamo di alcune eccezioni che segnano la stasi del Novecento. E vorrei, a questo proposito, rendere omaggio almeno a Orseolo Fasolo e Ugo Saccardi, che rimangono ancora oggi un punto di riferimento per quanti si occupano dei problemi della ricerca e dell'insegnamento in questo delicato settore di studi propedeutici alla formazione del progettista.

Forte di questo potenziale formativo, la geometria descrittiva ha interpretato ancora il ruolo centrale, che Monge le aveva attribuito, fino alla fine del secolo, ma già nel 1987, con la versione 10 del noto programma AutoCAD è stata offerta la possibilità, a chiunque fosse in possesso di un personal computer, di compiere una esperienza geometrico descrittiva del tutto nuova: il disegno nello spazio tridimensionale. Seguirono, assai rapidamente, programmi sempre più agili e potenti fino agli strumenti attuali che, in quell'ormai lontano '87, era persino difficile immaginare.

Ma soffermiamoci, sia pur brevemente, su questo momento epocale.

Chi si occupa di geometria descrittiva sa che questa scienza insegna ad operare nello spazio servendosi di costruzioni geometriche piane. Come insegna lo stesso Monge:

> il primo scopo della geometria descrittiva è rappresentare con esattezza, su disegni che hanno solo due dimensioni, gli oggetti che ne hanno tre e che sono suscettibili di una definizione rigorosa[3].

Ebbene il computer offre finalmente la possibilità di seguire una via più breve, che consiste nel rappresentare, in uno spazio virtuale che ha tre dimensioni, gli oggetti 'che sono suscettibili di una definizione rigorosa'. Naturalmente ciò non rende il processo automatico, ma si limita a renderlo evidente. Mi spiego meglio. Quando si rappresenta, ad esempio, un dodecaedro nel metodo delle proiezioni ortogonali, si segue, a grandi linee, questo

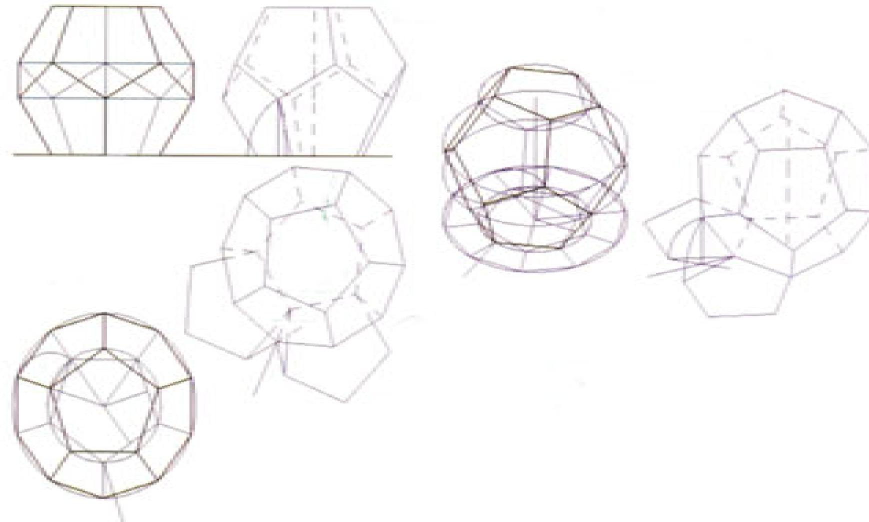

Fig. 2

processo (fig. 1): si discute e si sceglie la via che si intende seguire nella costruzione e ve ne sono molte possibili; ad esempio si possono utilizzare le proprietà geometriche del poliedro per stabilire le quote assunte dai vertici quando una delle facce appartiene al piano orizzontale (vedi, ad esempio Gino Fano[4], a sinistra nella figura), oppure si parte dallo sviluppo di sei facce sul piano orizzontale e si richiudono poi nello spazio con l'operazione inversa del ribaltamento[5] (vedi Gino Loria, a destra, nella figura);

si compiono le operazioni suddette servendosi delle proiezioni grafiche, che permettono, come si è detto, di operare nello spazio attraverso costruzioni geometriche piane. Ebbene, se si vuole rappresentare il dodecaedro nello spazio virtuale del computer, si deve seguire esattamente il medesimo processo, con una sola differenza, che riguarda la seconda fase: qui le operazioni possono essere compiute direttamente nello spazio, senza la mediazione delle proiezioni. Fatto, questo, di non poco conto, come vedremo, anche in termini di accuratezza del risultato. Una volta costruito l'oggetto, si può sempre chiedere alla macchina di generarne le proiezioni, se necessario, e questo, sì, è un processo automatico (fig. 2).

Dunque la geometria descrittiva è ancora presente nel processo di costruzione, anche se non si occupa più, in particolare, di elaborare le proiezioni grafiche. Ma, come se ciò non bastasse, la rappresentazione esatta degli oggetti non è il solo compito della geometria descrittiva. Nella definizione mongiana esiste, infatti, un secondo scopo che è

> dedurre dalla descrizione esatta dei corpi tutto ciò che discende, per conseguenza, dalle loro forme e dalle loro posizioni reciproche; e, in tal senso, la geometria descrittiva è un mezzo per la ricerca della verità scientifica e offre esempi perpetui del passaggio dal noto all'ignoto...[6]

Qui è opportuno soffermarsi sull'espressione 'passaggio dal noto all'ignoto'. Monge, infatti, non si riferisce all'ovvio guadagno che la rappresentazione di un oggetto fornisce alla conoscenza dell'oggetto stesso, ché, se così fosse, avrebbe detto 'dall'ignoto al noto'. Chi progetta, ad esempio, sa bene quanto utile sia il disegno per chiarire, verificare e precisare l'idea progettuale. Questo è un passaggio dall'ignoto, da ciò che un'idea ancora non ha espresso, al noto, al completamento, all'arricchimento, al maggior risalto di un'idea. Monge dice, invece, dal noto all'ignoto, il che non può avere che un senso: è una allusione al potente effetto euristico del disegno. Quando si disegna, infatti, ci si imbatte spesso in nuove scoperte, che possono riguardare, ad esempio, proprietà geometriche sconosciute. Darò, nel seguito, qualche esempio recente di queste potenzialità della geometria descrittiva, ma qui vorrei ricordare almeno il caso di Yvon Villarceau che scopre una classe di sezioni circolari

Fig. 3

del toro, quella che si ottiene con i piani bitangenti (fig. 3), disegnando una *épure*, una tavola[7].
E allora, preso atto di questo importantissimo ruolo che il disegno ha nella ricerca in geometria descrittiva, è doveroso chiedersi quali effetti ha avuto e avrà l'avvento delle nuove tecniche alle quali abbiamo fatto cenno, nello sviluppo della ricerca in geometria descrittiva.
La storia della scienza è ricca di esempi del ruolo che gli strumenti assumono nella conquista di nuove conoscenze. Il cannocchiale diede modo a Galileo di osservare i satelliti di Giove, ma non gli permise di comprendere la forma di Saturno, con quel caratteristico anello che oggi possiamo esaminare molto da vicino grazie alle sonde e ai telescopi montati su satellite. È perciò del tutto legittimo chiedersi quali opportunità offrono i computer al progresso della geometria descrittiva.
I computer attuali, dotati di programmi per la modellazione matematica, permettono oggi tre operazioni fondamentali, che prima della rivoluzione informatica non erano possibili:

1. *disegnare nello spazio tridimensionale*, come abbiamo già detto;
2. *utilizzare nelle costruzioni e nelle dimostrazioni geometriche curve e superfici qualsiasi* e non più solo la retta e il cerchio;
3. *realizzare tracciati almeno cento volte più accurati di quanto avveniva in passato.*

A queste tre prestazioni elementari si deve poi aggiungere la possibilità, che come vedremo non è da trascurare, di realizzare rappresentazioni molto efficaci, dotate di ombre e chiaroscuro, trasparenze e riflessi, in movimento interattivo.
Esaminiamo dunque, per cominciare, questi mattoni della costruzione geometrica che sono le linee. In passato, come è noto, era permesso l'uso, nelle costruzioni geometriche, di due soli strumenti: la riga e il compasso. Ciò significa che, come meglio vedremo tra poco, non era ammesso usare, ad esempio, una parabola o anche una qualsiasi curva luogo, anche se non mancano alcune eccezioni come, ad esempio, nel problema di Delo o nella trisezione dell'angolo[8]. Vi sono due motivi, io credo, che spiegano questo divieto: il primo è da ricercare nel fatto che il sistema logico deduttivo di Euclide comprende e utilizza soltanto la retta e il cerchio, e perciò la riga e il compasso, che sono gli strumenti che tracciano queste due linee. Il secondo motivo, invece, è da ricercare nella accuratezza del tracciamento: in passato, infatti, riga e compasso erano i soli strumenti affidabili. In particolare il compasso veniva considerato ancora più accurato della riga ed è infatti questa considerazione a motivare la 'Geometria del compasso' di Lorenzo Mascheroni[9] (1797), opera destinata, come spiega l'Autore, a migliorare la costruzione degli strumenti che fanno uso di quadranti, come gli strumenti nautici e topografici.
Ma qual è l'accuratezza di un grafico tracciato con riga e compasso? L'accuratezza è in relazione allo spessore del segno. Consideriamo, ad esempio, un punto situato nella intersezione di due rette perpendicolari, rappresentate da un segno di un decimo di millimetro di spessore: è evidente che il punto può trovarsi ovunque all'interno del quadrato comune ai due segni. Questo quadrato ha una diagonale che misura radice di due e quindi l'accuratezza di questo ipotetico disegno è pari a circa 1,4 decimi. Ciò significa che il punto può trovarsi nell'uno o nell'altro estremo della diagonale, il che misura anche l'incertezza del tracciato.

Naturalmente questo esempio è poco significativo, perché, in realtà l'accuratezza del disegno è di gran lunga peggiore a causa del sommarsi degli errori, ma serve egregiamente per comprendere le differenze, quanto alla accuratezza delle costruzioni, tra un grafico e una costruzione digitale.
Anche i computer, infatti, hanno limiti di accuratezza. Questi limiti derivano dalla necessità di elaborare numeri finiti e comportano situazioni paradossali. Infatti, per ovviare ai limiti di precisione, i programmatori stabiliscono valori di tolleranza entro i quali due punti vengono considerati coincidenti anche se, in realtà, non lo sono. Se, ad esempio, la tolleranza è di un millesimo di millimetro (un micron) due punti vengono considerati coincidenti se distano meno di un micron e distinti se distano più di un micron. Per inciso, ciò comporta situazioni paradossali come questa: se **A** e **B** sono distanti meno di un micron, perciò coincidono, e **B** e **C** sono anche distanti meno di un micron, può avvenire che **A** e **C** non coincidano.
Ma, lasciando a chi si occupa di programmazione, questi non facili problemi, resta il fatto che i programmi per la modellazione informatica hanno una accuratezza almeno cento volte migliore di quella grafica, vale a dire un micron contro un decimo di millimetro. Perciò, se Mascheroni tornasse a occuparsi di geometria, non v'è dubbio che riporrebbe il compasso nella sua custodia di velluto e si servirebbe del computer per disegnare.
Se consideriamo ora il fatto che il computer applica la medesima cura nel tracciamento di rette e cerchi, come di curve qualsiasi, possiamo concludere che è lecito, e auspicabile, impiegare nelle costruzioni geometriche attuali non solo riga e compasso, ma anche le coniche e altre curve algebriche, se necessario. Inoltre, ricordando il fatto enunciato per primo e cioè che il disegno si svolge ora nello spazio, è lecito introdurre, tra le entità usate nelle costruzioni, anche le superfici.
Ad esempio, così come in passato si è usato il cerchio quale luogo geometrico dei punti equidistanti da un centro, così oggi si può utilizzare la sfera. Nel piano, due cerchi che abbiano centro negli estremi opposti di un segmento e per raggio il segmento stesso, si intersecano in due punti che individuano la retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio.
Nello spazio, due sfere che abbiano centro negli estremi di un segmento e per raggio il segmento stesso, si intersecano secondo un cerchio che individua il piano perpendicolare al segmento nel suo punto medio. È un esempio banale, ma che fa capire le potenzialità dello strumento.
Un esempio meno banale è offerto dalla costruzione dei piani tangenti condotti da una retta a una sfera. La soluzione classica di questo problema consiste nella costruzione del piano che passa per il centro della sfera ed è perpendicolare alla retta data: questo piano ha in comune con la sfera un cerchio massimo e con la retta un punto. Le due tangenti che si possono condurre dal punto al cerchio, individuano, con la retta data, i due piani tangenti. Una soluzione alternativa viene proposta prima da Jean Pierre Nicholas Hachette[10] e poi ancora da Brunhes[11], nel suo sforzo di dare generalità ai procedimenti della geometria descrittiva e consiste in questo procedimento: si staccano sulla retta data due punti qualsiasi, distinti; si costruiscono i contorni apparenti della sfera rispetto all'uno e all'altro di questi punti. Questi contorni sono due cerchi minori, che hanno due punti in comune. Ciascuno di questi due punti forma, insieme ai due staccati sulla retta, una terna, che indi-

Fig. 4

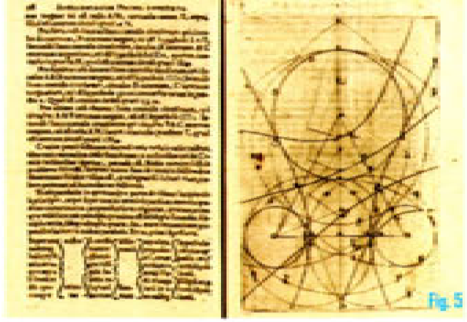

Fig. 5

vidua uno dei piani tangenti. Ora, io immagino che nel primo novecento questa soluzione potesse apparire poco pratica. Ma oggi è quanto mai attuale, non solo perché è veloce, essendo la costruzione del contorno apparente una prestazione proiettiva di base in un software che si occupa di rappresentare gli oggetti, ma anche perché è del tutto generale. Ciò significa che questa costruzione non solo fornisce i due piani tangenti ad una sfera condotti per una retta assegnata, ma anche gli **n** piani tangenti ad una superficie qualsiasi (fig. 4).

Ciò premesso, vorrei mostrare un esempio del modo di operare degli strumenti digitali quando sono applicati alla geometria descrittiva. Ho scelto il problema di Apollonio, per due ragioni fondamentali: la prima è relativa al condizionamento esercitato su questo problema, nei secoli, dai limiti della rappresentazione grafica; la seconda è relativa, invece, al superamento di questi limiti, che si ottiene per effetto delle prestazioni particolari della rappresentazione digitale, sopra ricordate: spazialità, generalità, accuratezza.

Il problema di Apollonio può essere posto tanto nel piano, quanto nello spazio. Nel piano sono date tre entità, scelte tra punti, rette e cerchi, e si vuole costruire il cerchio che le tocca tutte e tre. Nello spazio sono date quattro entità, scelte tra punti, piani e sfere, e si vuole costruire la sfera che le tocca tutte e quattro. Nel piano si hanno, perciò, dieci possibili combinazioni dei dati. Nello spazio, invece, le combinazioni sono quindici.
Il punto e la retta possono essere visti come degenerazioni del cerchio, quando il raggio si annulla o cresce fino a diventare incommensurabile. E altrettanto può dirsi nello spazio, del punto e del piano come degenerazioni della sfera. Considerazione, questa, che giustifica il fatto che tutti questi problemi siano stati raccolti in uno.
Apollonio, oltre ad avere scritto il trattato sulle coniche che gli ha dato fama immortale, è autore di molti altri libri, e tra questi di un'opera sui contatti, ovvero sulle tangenze, che è andata perduta. Fortunatamente, Pappo Alessandrino, matematico del IV secolo d.C., ci ha lasciato, nella sua Synagoge, un breve resoconto del contenuto di questo libro perduto. Pappo riferisce che Apollonio diede la soluzione del problema nel piano, ma non spiega quale fosse questa soluzione. Nel 1588 fu pubblicata, postuma, una traduzione latina delle Collezioni di Pappo, opera di Federico Commandino[12]. I matematici del tempo si accorsero così del problema di Apollonio e fecero a gara per ritrovare la soluzione originale. Il primo a dare una risposta fu Adriaan Van Roomen, uno studioso belga, oggi quasi dimenticato, che pubblicò, nel 1596, la sua soluzione in una breve trattazione intitolata Problema Apolloniacum[13] (fig. 5).
Van Roomen considera il più complesso dei dieci casi, quello in cui sono dati tre cerchi, e osserva che il luogo geometrico dei punti equidistanti da due cerchi distinti è un'iperbole che ha i fuochi nei centri dei cerchi.
È facile verificare la scoperta di Van Roomen, e infatti (fig. 6): chiamiamo **A** e **B** i centri dei due cerchi dati e supponiamo che **P** sia uno dei punti cercati, equidistante dalle circonferenze che hanno centro in **A** e in **B**. Le distanze suddette si misurano, evidentemente, sui raggi **AP** e **BP**, nei segmenti **CP** e **DP**, dove **C** e **D** sono i punti che i raggi **AP** e **BP** hanno in comune, rispettivamente, con le due circonferenze: Posto che, per assunto:
CP = DP

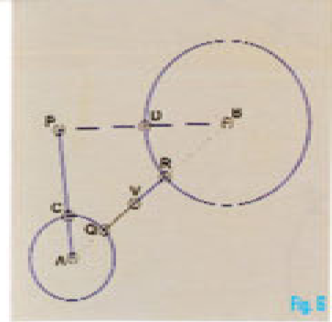

Fig. 6

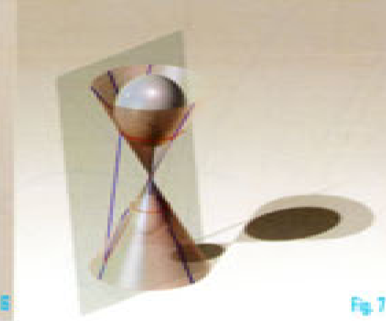

Fig. 7

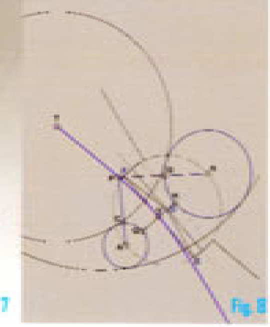

Fig. 8

e che:
CP = AP - AC
DP = BP - BD
sostituendo si ottiene:
AP - AC = BP – BD
e, perciò:
AP - BP = AC – BD .
Ma **AC – BD** è la differenza dei raggi dei due cerchi considerati, e dunque è una costante:
AC – BD = k .
Perciò **AP – BP = k**, il che significa che il punto **P**, e con lui qualsiasi punto che sia equidistante dalle due circonferenze date, gode di questa proprietà: la differenza delle distanze di **P** dai centri delle due circonferenze è costante. Ora, come ognuno sa, e come noi (ma non Van Roomen) potremmo elegantemente dimostrare con Dandelin[14] (fig. 7), questo luogo è una iperbole e i suoi fuochi sono i centri dei due cerchi dati!
Resta da chiarire se l'iperbole di cui sopra è anche individuata, cioè se può essere costruita con gli elementi a nostra disposizione. In effetti, il punto **P** è stato ipotizzato come esistente, ma non lo è di fatto, e tuttavia, oltre ai fuochi, noi possediamo un altro punto dell'iperbole e precisamente uno dei vertici (fig. 8). Questo vertice è, con tutta evidenza, il punto **V**, medio del segmento **QR** staccato, dalle due circonferenze, all'interno di **AB**. Infatti, questo punto **V** è equidistante dalle circonferenze e perciò appartiene all'iperbole, inoltre appartiene alla retta che passa per i fuochi, cioè all'asse dell'iperbole, e perciò è, come si diceva, uno dei vertici. Perciò, possiamo tracciare l'iperbole a mezzo dell'asse trasverso e del suo coniugato. Con centro nel punto medio **O**, del segmento **AB**, che è anche il centro dell'iperbole, essendo equidistante dai fuochi, si traccia la circonferenza di diametro **AB**. Per il vertice **V** si conduce una perpendicolare all'asse **AB** fino a incontrare la circonferenza nei punti **E** e **F**. Le rette **EO** e **FO** descrivono gli asintoti dell'iperbole. Si completa il rettangolo che ha **EF** come lato e **EO**, **FO** come semidiagonali. Le mediane di questo rettangolo (considerate in grandezza e posizione) sono l'asse trasverso dell'iperbole (quello che appartiene ad **AB**) e il suo coniugato, detto anche asse non trasverso, e determinano l'iperbole stessa, la quale può essere tracciata, in un disegno digitale, con accuratezza pari a quella di un cerchio.
Ciò premesso, è evidente che tutti i punti che appartengono all'iperbole, come ad esempio **T**, sono centri di cerchi che toccano simultaneamente le due circonferenze date. Ma ogni iperbole ha due rami, simmetrici rispetto agli assi. E se i punti del primo ramo che abbiamo costruito, quello più vicino alla circonferenza di raggio minore, sono centri di cerchi tangenti, quale proprietà avranno i punti del secondo ramo dell'iperbole?
Essi sono i centri di cerchi che toccano ancora i due dati, ma in un modo diverso. Il primo ramo, quello che abbiamo costruito vicino al cerchio di minor diametro, è luogo dei centri delle circonferenze che toccano i due cerchi lasciandoli entrambi all'esterno, mentre il secondo ramo è luogo dei centri delle circonferenze che toccano i due cerchi dati comprendendoli entrambi al loro interno, come si verifica immediatamente, sia ripetendo il ragionamento già fatto con **C** e **D** dalla parte opposta dei cerchi dati, sia descrivendo un cerchio con centro sul secondo ramo dell'iperbole, tangente a uno dei cerchi dati, per controllare poi che risulti tangente anche all'altro. E questa verifica può essere presa come esempio di quel procedimento sperimentale che, se non convalida un'ipotesi, è però in grado di suggerirla e verrà poi il ragionamento a dare le

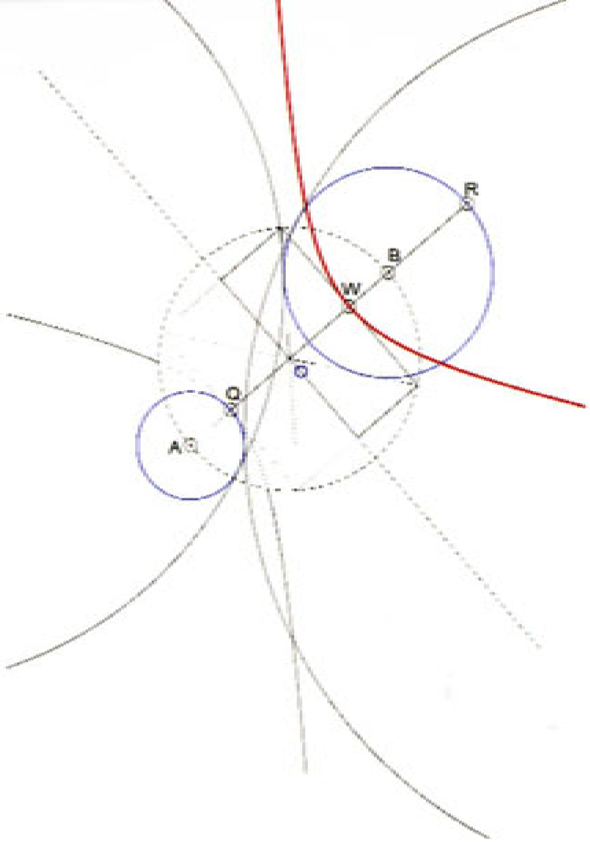

Fig. 9

necessarie conferme.

Appare ora evidente che esistono altre due possibili situazioni: quella di cerchi che sono ancora una volta tangenti a entrambi i cerchi dati, ma toccano l'uno all'esterno, mentre comprendono l'altro al loro interno e viceversa. Per costruire anche i luoghi geometrici descritti dai centri di questi cerchi, basta considerare un segmento **QR** che attraversi uno dei cerchi dati fino a toccarlo con il primo estremo, mentre il secondo estremo tocca il secondo cerchio dall'esterno (fig. 9). Applicando le medesime considerazioni che abbiamo già esposto, potremo generare una seconda iperbole, confocale alla prima, i cui due rami sono i luoghi geometrici dei centri dei cerchi che, come si è detto, toccano i cerchi dati lasciandone uno all'esterno, mentre comprendono l'altro al loro interno.

Allo stesso modo, cioè con analoghe considerazioni e altrettanta facilità, si può dimostrare che il luogo geometrico dei punti equidistanti da un cerchio e da un punto è ancora un'iperbole, che il luogo dei punti equidistanti da un cerchio e da una retta è una parabola, e che il luogo dei punti equidistanti da due cerchi dei quali l'uno sia interno all'altro è un'ellisse.

Ora è evidente che, dati tre elementi, ad esempio tre cerchi, e costruite le tre coniche che rappresentano i luoghi sopra descritti per ciascuna coppia, queste coniche si intersecheranno in punti che sono centri di cerchi che soddisfano la richiesta del problema (fig. 10).

Dunque appare chiaro, e ciò anche per merito del disegno, che la soluzione non è una sola, come si poteva forse intuire senza una adeguata riflessione, ma sono molteplici. Infatti, come abbiamo detto, ogni cerchio tangente i tre dati può avere un comportamento diverso rispetto ad uno di questi cerchi: può lasciarlo all'esterno o comprenderlo all'interno e poiché tre sono i cerchi da toccare in due modi, si hanno in tutto otto possibili soluzioni: sei alterne (interno/esterno) e due omologhe. Per descrivere queste soluzioni si può ricorrere a una

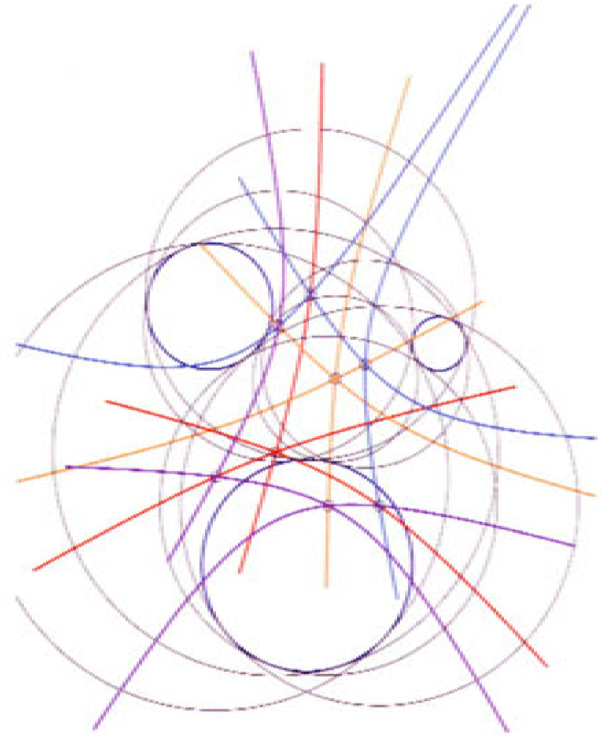

Fig. 10

semplice convenzione: se **A**, **B** e **C** sono i tre cerchi dati, si chiama **AiBiCi** il cerchio che tocca quelli dati comprendendoli tutti all'interno, **AeBeCe** il cerchio che tocca i cerchi dati lasciandoli tutti all'esterno e così via, giocando sugli indici **i** ed **e** per indicare le varie combinazioni, come nella tabella che segue:

Tangenze di un cerchio rispetto ad altri tre			
1	Ai	Bi	Ci
2	Ai	Bi	Ce
3	Ai	Be	Ci
4	Ai	Be	Ce
5	Ae	Bi	Ci
6	Ae	Bi	Ce
7	Ae	Be	Ci
8	Ae	Be	Ce

Questa soluzione di Van Roomen appare oggi semplice ed elegante, ma non così l'ha giudicata la storia. Infatti, due anni dopo la pubblicazione del Problema Apolloniacum, François Viète risponde a Van Roomen con un libretto dal titolo Apollonius Gallus[15], nel quale, prima di dare la propria soluzione, critica aspramente il collega belga. Vale la pena di considerare brevemente l'incipit di questo scritto, perché dimostra, tra l'altro, il ruolo che il disegno ha avuto in questa tormentata vicenda.

Scrive dunque Viète:

> Riguardo al problema di Apollonio del disegno d'una circonferenza che tocchi tre circonferenze date (oh illustrissimo Adriano) ho proposto, a chi è amante della ricerca, di costruirla secondo un principio geometrico, e non meccanico. Costruendo la circonferenza tramite iperboli non cogli nel segno. E infatti non è possibile, in geometria, descrivere le iperboli con metodo scientifico. Menecmo ha duplicato il cubo tramite parabole, Nicomede tramite concoidi, e allora? Forse che per questo il

> cubo è stato duplicato geometricamente? Dinostrato ha quadrato il cerchio tramite una curva irregolare [la 'trisettrice' nota anche come 'quadratrice' n. d. A.], Archimede invece tramite una spirale regolare, e allora? Forse si è così ottenuta, geometricamente, la quadratura del cerchio? In verità, nessun geometra oserà affermarlo. Reclamerebbe Euclide, e con lui tutta la sua scuola. Di conseguenza, oh illustrissimo Adriano – e anzi, se preferisci, oh Apollonio Belga! – dal momento che il problema che ho proposto è nel piano, ma tu in realtà l'hai sviluppato come se si trattasse di un problema posto nello spazio, né hai provato l'incontro delle iperboli, che ammetti per i tuoi scopi, né potresti provarlo in ogni caso, poiché in effetti se gli asintoti fossero paralleli sarebbe un lavoro inutile – e del resto gli antichi esitarono sempre a tracciare sezioni coniche in piano – congeda le linee spurie e da un Apollonio già ridestato presso le rive dell'Oceano di Aquitania impara in più l'abile esercizio del mestiere scientifico[16].

Come si vede, dunque, Viète avanza tre obiezioni:
la prima riguarda proprio la costruzione grafica adottata da Van Roomen, cioè l'uso dell'iperbole;
la seconda è una questione di principio, che si riassume nel reclamo di Euclide e di tutta la sua scuola;
infine la terza, in verità assai artificiosa, riguarda il fatto che le coniche sono curve che appartengono allo spazio, mentre il problema proposto è nel piano. Ma perché, secondo Viète, le coniche sono curve dello spazio e non del piano, come tutti sappiamo?

Perché Apollonio le ricava dalla sezione del cono, in un contesto di geometria solida. Poco importa, evidentemente, il problema delle tangenze sia stato enunciato dall'Autore delle Coniche e che, perciò, è assai probabile che proprio queste curve fossero usate nella soluzione originale.

Fatto sta che la critica di Viète venne universalmente accettata e oggi Van Roomen, altrimenti noto come Adrianus Romanus, è appena citato nei libri di storia della scienza.

Il nostro atteggiamento, invece, è completamente diverso. La prima delle obiezioni di Viète, quella che riguarda l'accuratezza del tracciamento, cade perché noi siamo in grado di disegnare una curva qualsiasi con la medesima accuratezza con cui disegniamo una retta o un cerchio; la seconda obiezione cade perché non ha più senso porsi questioni di principio; infine la terza obiezione cade, perché noi possiamo disegnare nello spazio.

E vediamo, allora, come il problema si pone nello spazio e come sia possibile risolverlo generalizzando la soluzione di Van Roomen.

Prima, però, è doveroso gettare almeno un fugace sguardo sul lavoro di quanti hanno dato soluzioni, più o meno complete, alla costruzione delle sfere che toccano altre quattro date.

Il primo è Pierre de Fermat che, in un lavoro pubblicato postumo nel 1679, De contactibus sphaericis[17], fornisce una soluzione classica, basata cioè su riga e compasso. Fermat, tuttavia, è un astronomo che non possiede il telescopio, per dirla con la metafora che ho già proposto.

Gli strumenti che egli usa per rappresentare lo spazio, sia logici che operativi, sono ancora molto approssimativi, al punto che non basta il suo genio straordinario per fargli riconoscere la pluralità delle soluzioni, né tanto meno il loro numero, né le eventuali eccezioni.

Altri contributi sono dovuti a Isaac Newton, a René Descartes, a Leonhard Euler, ma non hanno miglior fortuna. Ed arriviamo così, rapidamente, all'epoca

dei lumi e della geometria descrittiva.

Due sono i geometri che si occupano del problema di Apollonio nel primo ottocento: Jean Pierre Nicholas Hachette[18] e Louis Gaultier de Tour[19]. Entrambe le soluzioni sono assai complesse e afflitte, pur sempre, dalla mancanza di rappresentazioni adeguate.

Quella di Gaultier merita di essere ricordata, in particolare, perché, al fine di conservare l'uso esclusivo della riga e del compasso, costruisce una intera teoria detta 'dei radicali', nella quale vengono poste definizioni e stabilite proprietà che sono oggi patrimonio acquisito della geometria.

Gaultier ha infine il merito di aver riconosciuto, finalmente, il numero esatto delle soluzioni ammesse dal problema, che è sedici, e le condizioni nelle quali le sedici sfere tangenti alle quattro date sono tutte presenti. Bisogna ricordare, però, che la costruzione di Gaultier, con le relative dimostrazioni, occupa circa cento pagine e due tavole di disegni che sono più diagrammi che proiezioni canoniche nel senso a noi noto. Perciò è impossibile riassumerla in breve.

La soluzione di Van Roomen si estende invece allo spazio in modo facile ed immediato, essendo oggi praticabile grazie alla rappresentazione informatica. Prima di esporla, però, sarà bene stabilire per le sfere che soddisfano il problema una convenzione analoga a quella posta per i cerchi nel piano.

Chiameremo **A**, **B**, **C** e **D** le quattro sfere date e useremo gli indici **e** e **i** per indicare il comportamento della sfera tangente rispetto a quelle date: **e** segnalerà il fatto che la sfera tangente tocca la sfera data lasciandola all'esterno, **i** che l'abbraccia comprendendola al suo interno. In questo modo è facile enumerare in una tabella le sedici soluzioni (vedi tabella a lato).

Tangenze di una sfera rispetto ad altre quattro

1	Ai	Bi	Ci	Di
2	Ai	Bi	Ci	De
3	Ai	Be	Ce	Di
4	Ai	Be	Ce	De
5	Ai	Bi	Ci	Di
6	Ai	Bi	Ci	De
7	Ai	Be	Ce	Di
8	Ai	Be	Ce	De
9	Ae	Be	Ci	Di
10	Ae	Bi	Ci	De
11	Ae	Bi	Ce	Di
12	Ae	Bi	Ce	De
13	Ae	Be	Ci	Di
14	Ae	Be	Ci	De
15	Ae	Be	Ce	Di
16	Ae	Be	Ce	De

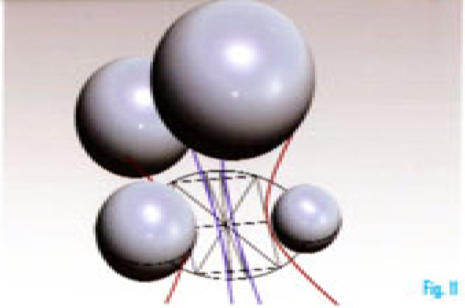

Fig. 11

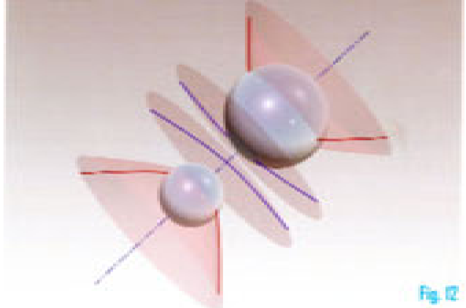

Fig. 12

Consideriamo ora due delle sfere date e sezioniamole con un piano qualsiasi del fascio che ha per sostegno la retta che unisce i due centri. Questa operazione ci riconduce nel piano, ove possiamo costruire l'iperbole luogo geometrico dei punti equidistanti dai due cerchi sezione (fig. 11). Analoghe costruzioni potrebbero essere eseguite su ciascuno dei piani del fascio che abbiamo considerato, ragion per cui i luoghi geometrici descritti da Van Roomen si traducono, nello spazio, in due iperboloidi di rivoluzione a due falde (fig. 12). E ciascuna di queste falde è luogo geometrico dei centri di sfere che toccano le sfere date lasciandole tutte e due all'esterno, tutte e due all'interno o una all'interno e l'altra all'esterno e viceversa.

È chiaro, perciò, che costruendo gli iperboloidi luogo geometrico di ciascuna delle sei coppie che possono esser formate con le quattro sfere date si otterranno, per intersezione, curve con analoghe caratteristiche in relazione al tipo, esterno /interno, di luogo geometrico e che, infine, queste curve si incontreranno nei centri delle sfere che risolvono il problema.

Ora io non credo che interessi, ai nostri fini, il dettaglio della costruzione, che ha solo una difficoltà di natura combinatoria, più che geometrica. Interessa però osservare un risultato notevole, notevole perché efficace esempio di quel passaggio 'dal noto all'ignoto', di cui parla Monge.

La costruzione si fonda, come abbiamo detto, sulle curve intersezione di due falde confocali di iperboloidi di rivoluzione che hanno in comune un solo fuoco e gli assi distinti. Trattandosi di superfici quadriche mi sarei aspettato di trovare, come risultato dell'intersezione, curve del quart'ordine e cioè gobbe o sghembe, che dir si voglia. Invece queste curve sono piane e, perciò, sono iperboli!

Ho cercato invano una semplice giustificazione geometrica di questo evento. Una giustificazione si trova invece nella sintesi dei lavori di Hachette e Gaultier, ma richiede una lunga disamina.[20]

Un altro esempio notevole del potere euristico della rappresentazione è da ricercare nel numero delle curve intersezione che, incontrandosi, identificano il centro della sfera soluzione.

Consideriamo una sola delle sfere che risolvono il problema, ad esempio, la **AiBiCeDe** (fig. 13). Secondo le convezioni adottate, si tratta di una sfera che è tangente alle sfere **A** e **B** che tiene al proprio interno, mentre tocca le sfere **C** e **D**, lasciandole all'esterno.

Ora, non tutte le possibili curve generate dalle intersezioni degli iperboloidi hanno senso ai fini della nostra ricerca: ad esempio, non ha senso considerare l'intersezione di una falda luogo geometrico dei centri delle sfere che tengono **A** all'interno con una falda luogo geometrico dei centri delle sfere che tengono **A** all'esterno. Bisogna perciò considerare solo le superfici che sono coerenti con lo scopo della ricerca. Per ottenere il centro della sfera **AiBiCeDe**, dobbiamo perciò usare le falde dei seguenti iperboloidi: **AiBi**, **AiCe**, **AiDe**, **BiCe**, **BiDe**, **CeDe**.

Le loro mutue intersezioni debbono appartenere ad un medesimo punto, che è il centro della sfera **AiBiCeDe**, cioè la soluzione cercata.

Ora, sei superfici che si intersecano passando per un medesimo punto danno luogo, in generale, a quindici curve. Infatti ogni superficie taglia tutte le **n** altre, meno sé stessa, ciò che porta a trenta curve, ma è a sua volta tagliata dalle altre, ciò che dimezza il numero **N** delle curve, onde:

$\mathbf{N} = [\mathbf{n}\,(\mathbf{n}-1)]\,/\,2.$

Accade, però, che le tre falde di iperboloidi luogo

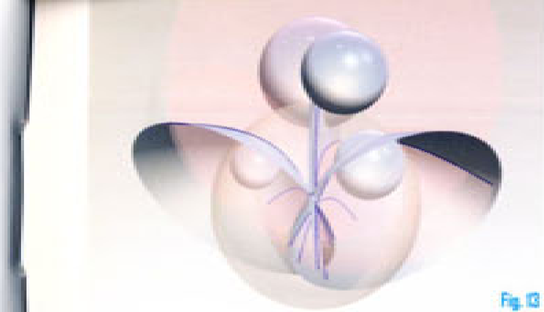

Fig. 13

geometrico che nascono dai tre rami di iperboli complanari e coerenti si taglino secondo un'unica curva, anch'essa piana, che giace in un piano perpendicolare al piano delle iperboli! E poiché con quattro punti, i centri delle sfere date, si possono formare quattro terne, dodici delle quindici curve si riducono a quattro, mentre il totale delle intersezioni distinte si riduce a sette. Perciò, possiamo affermare che si ha la certezza di aver trovato una delle sedici soluzioni, quando in un punto concorrono almeno sette delle curve intersezioni degli iperboloidi.

L'esame del problema di Apollonio e della relativa soluzione nello spazio virtuale ha dimostrato, credo, che il modo di praticare la geometria descrittiva, nella ricerca come nell'insegnamento, può essere profondamente modificato e vorrei riassumere le caratteristiche di questo mutamento.

In primo luogo è possibile, oggi, studiare e risolvere i problemi tipici della geometria descrittiva direttamente nello spazio. Ciò è perfettamente in linea con la tradizione geometrico descrittiva, che ha sempre ricercato lo spazio, con ogni mezzo, modelli fisici come rappresentazioni stereoscopiche e anaglifi[21].

Per lungo tempo l'insegnamento universitario della geometria descrittiva ha trascurato questa possibilità. Voglio dire che noi, docenti di geometria, abbiamo insegnato ai nostri studenti a modellare in tre dimensioni l'architettura e gli oggetti del design, compito questo del disegno, mentre avremmo potuto e dovuto insegnare a costruire le soluzioni di problemi geometrici, a modellare le superfici e studiarne le proprietà, attraverso l'esperienza digitale. Avremmo dovuto, per dirla ancora una volta con Monge, concentrare i nostri sforzi sul secondo oggetto della geometria descrittiva, quello che fornisce continui esempi del passaggio dal noto all'ignoto e che, come mezzo di ricerca della verità, ha un inestimabile valore formativo, perfino da un punto di vista squisitamente etico.

In secondo luogo è possibile, oggi, tracciare i disegni che abitano lo spazio virtuale, con una accuratezza dell'ordine del millesimo di millimetro e compiere, sulle forme geometriche, vere e proprie sperimentazioni, quale il riconoscimento di forme attraverso gli strumenti di analisi statistica di cui i programmi sono dotati. Questo tipo di analisi è anche un validissimo banco di prova per gli strumenti della rappresentazione digitale (hardware e software). Riguardo alle imprese produttrici del software, noi dobbiamo cessare dal ruolo di semplici fruitori, per cercare un rapporto che sia collaborativo e finalizzato alla costruzione di strumenti di validità generale. Mi riferisco alla cattiva abitudine dei produttori di individuare un target, come ad esempio il disegno d'architettura, per fornire poi soluzioni bell'e pronte, scatole di montaggio dove la costruzione, nel senso dell'ideazione e del progetto, viene mortificata.

Lo strumento base, dovrebbe essere invece un semplice modellatore matematico per il controllo metrico della forma e un modellatore numerico o poligonale per il controllo formale. Il rapporto con le imprese produttrici del software dovrebbe anche portare, ma sta a noi chiederlo, quella unificazione dei termini che già auspicava Brunhes, all'inizio del Novecento.

In terzo luogo, noi dobbiamo rivedere i nostri trattati di geometria descrittiva. I metodi di rappresentazione digitale, sia matematica che numerica o poligonale, debbono trovare posto accanto ai metodi grafici tradizionali, mettendo in evidenza non l'immagine che ciascun metodo produce, che

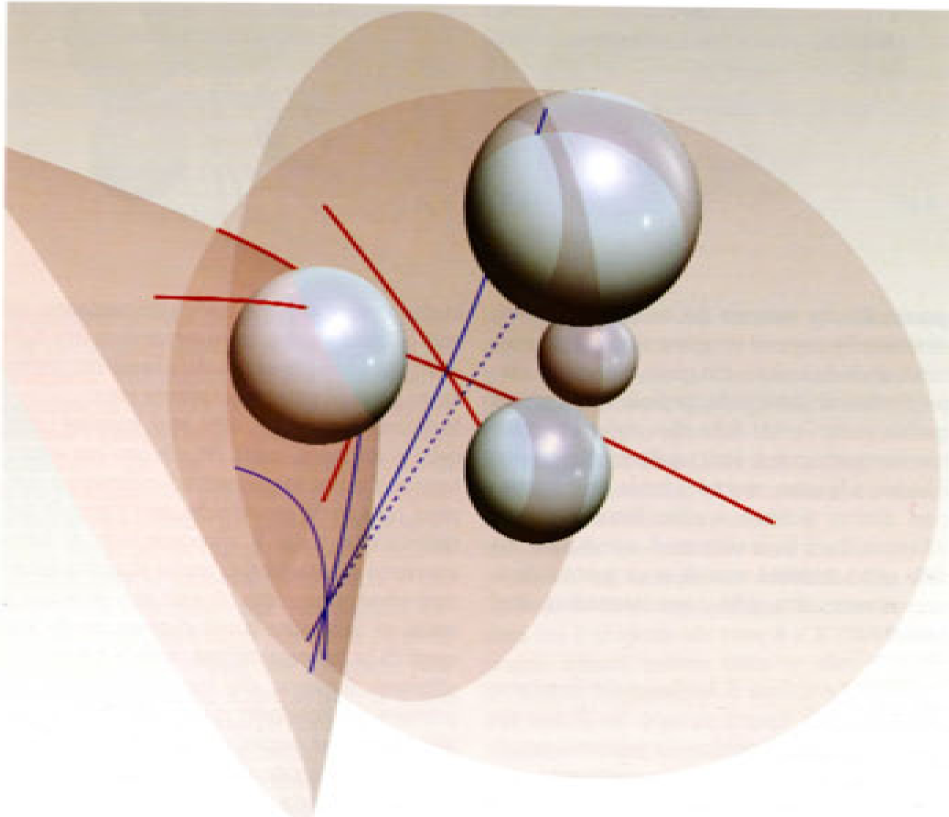

Fig 14. Il problema di Apollonio, nello spazio, risolto per mezzo dei luoghi di Van Roomen. Le curve intersezioni degli iperboloidi si intersecano, se coerenti, in punti che sono il centro delle sfere cercate

non è più l'elemento identificativo del metodo, ma l'uso al quale il metodo stesso è destinato. In questo senso esiste una analogia stretta tra la modellazione numerica e la prospettiva, tra il rendering e la teoria delle ombre e del chiaroscuro, così come esiste una stretta analogia tra il metodo delle proiezioni ortogonali e la rappresentazione matematica. Infine, la ricerca: la ricerca pura di nuove soluzioni, più semplici perché più generali accogliendo, anche qui, l'invito di Fiedler e Brunhes, il che significa, poi, rileggere criticamente, ridiscutere, ridisegnare quel grande patrimonio di cultura geometrica che la storia ci ha tramandato, dall'antichità a tutto l'Ottocento.

Note

[1] Wilhelm Fiedler, *Trattato di Geometria Descrittiva* del Dr. Guglielmo Fiedler, tradotto dall'Ingeg. Antonio Sayno e dal Dott. Ernesto Padova, Firenze Le Monnier 1874 (l'edizione originale è del 1871. In relazione a quanto prima si è detto sul carattere interdisciplinare della geometria descrittiva si noti che Fiedler è un matematico, mentre i suoi traduttori sono professori di Scienza delle costruzioni e Meccanica razionale, rispettivamente.

[2] F.G.M., Géométrie descriptive, Tours - Paris 1920. I fratelli lasalliani usavano firmare le loro opere con le iniziali del loro superiore. Per questo motivo, le precedenti edizioni di questo importante manuale della fine dell'ottocento, sono firmate F. I. –C., nel 1877, F.I. nel 1893, e finalmente F.G.M., vale a dire Fratel Gabriel Marie, dal 1909 al 1920, dato che l'Autore, in quel periodo, era egli stesso a capo della scuola. Il nome, al secolo, di Fratel Gabriel Marie era Edmond Brunhes (1834-1916).

[3] Cfr. Gaspard Monge, *Géométrie Descriptive*, Leçons données aux Écoles Normales, l'An 3 de la République, par Gaspard Monge, de l'Institut national, Paris Baudouin, An VII (1798), Programme, p. 2.

[4] Cfr. Gino Fano, *Lezioni di Geometria descrittiva*, date nel R. Politecnico di Torino, Torino Paravia, 1925 (terza edizione), n. 121, p. 118.

[5] Cfr. Gino Loria, *Poliedri, curve e superficie, secondo i metodi della Geometria Descrittiva*, Milano Hoepli 1912, II, 11, p. 31. Loria porta questa costruzione come esempio di 'metodo di dimostrazione esistenziale' nel suo *Metodi matematici, essenza, tecnica, applicazioni*, Milano Hoepli 1935.

[6] Cfr. Monge [1798], *Op. Cit.*

[7] Joseph Bertrand, nella edizione del 1890[8] dei suoi *Eloges académiques*, racconta che Yvon Villarceau scoprì la classe delle sezioni circolari del toro che si ottengono con il piano bitangente 'empiricamente', cioè, immagino, facendo un disegno. Tuttavia questa notizia di 'prima mano', venne sconfessata dal protagonista qualche anno più tardi, quando riferì d'aver trovato questa proprietà attraverso indagini di carattere analitico. Probabilmente le due versioni sono entrambe vere: prima viene il suggerimento dell'intuizione che si avvale del modello e delle sue immagini, poi l'indagine e la verifica analitica.

[8] Cfr. Guido Castelnuovo, *Lezioni di geometria analitica*, Società Editrice Dante Alighieri, Città di Castello 1969. L'edizione consultata è la sedicesima di un opera nata nel 1903 e contiene una importante appendice storica dedicata ai problemi della geometria elementare, alla loro classificazione e risolubilità per mezzo della riga, del compasso e di altri strumenti, reali, come la riga a due orli, o del tutto teorici. In tal modo Castelnuovo rende conto di una ricerca antichissima, che muove dal problema di Delo per approdare alla costruibilità dei poligoni regolari e ai relativi teoremi di Gauss.

[9] Cfr. Lorenzo Mascheroni, *La geometria del compasso*, Pavia Galeazzi 1797. Mascheroni cita la divisione dei quadranti astronomici proposta da Graham e Bird. Questi, per ottenere una maggiore precisione non hanno fatto uso della riga, ma del solo compasso. Il tracciamento di una riga, infatti, porta con sé un'incertezza dovuta allo scorrimento della punta e alla forma non perfetta della riga stessa. Il compasso, invece, non è soggetto a queste difficoltà e mantenendo fissa l'apertura e finissima la punta può raggiungere una precisione senza paragoni.

[10] Cfr. Jean Pierre Nicholas Hachette, *Traité de Géométrie Descriptive, comprenant Les Applications de cette géométrie aux ombres, à la perspective et à la stéréotomie*, Paris Corby 1828, Livre Second, Cap. I, Problème V, pag. 147.

[11] Cfr. F.G.M. [1920], *Op. Cit.*, Tome II, Chapitre III, n. 792, pag. 470.

[12] Pappi Alexandrini *Mathematicae Collectiones* À Federico Commandino Urbinate in latinum conversae, et commentariis illustratae. Pisaurum, apud Hieronymum Concordiam, M.D.LXXXVIII. Esiste anche una edizione immediatamente successiva, in Venezia 1589, e una più tarda in Bologna 1660.

[13] *Problema Apolloniacum*, Adrianum romanum constructum, Wirceburgi 1596.

[14] Il teorema di Dandelin (1822), noto anche come teorema di Dandelin-Quetelet, svela le proprietà dei punti di una conica, rispetto ai fuochi, utilizzando una costruzione tanto semplice quanto elegante. Sull'origine di questo teorema e sulla sua attribuzione si può leggere l'avventurosa biografia di Pierre Germinal Dandelin (1794 – 1847), scritta dal suo collaboratore e amico AD. Quetelet (1796 . 1874), *Sciences Mathématiques et phisiques au commencement du XIX siècle*, Bruxelles 1867, p. 144 e segg.

[15] François Viète, *Apollonius Gallus seu, Exsuscitata Apollonii Pergaei περι επαφων Geometria*, Ad V. C. A. R. Belgam, Parigi 1600.

[16] Traduzione di Marco Fallavollita e Guerino Sciulli. M. Fallavollita è dottorando in Filologia, Linguistica e Letteratura alla 'Sapienza'; G. Sciulli è dottorando in Filosofia presso la seconda Università di Roma a Tor Vergata.

[17] Cfr. E. Brassine, *Précis des Oeuvres Mathématiques de P. Fermat et de l'Arithmetique de Diophante*, Tolouse 1853.

[18] Jean Pierre Nicholas Hachette, *Correspondance sur l'école impériale polytechnique, à l'usage des élèves de cette école* par M. Hachette, Paris Imprimerie de H. Perroneau 1808-1816.

[19] Louis Gaultier de Tours, *Mémoire Sur les Moyens généraux de construire graphiquement un Cercle determiné par trois conditions, et une Sphère determinée par quatre conditions*, lu à la première Classe de l'Institut, le 15 Juin 1812, Journal de l'École polytechinique, XVI, 124 – 214.

[20] Una giustificazione è stata trovata nella sintesi dei lavori di Hachette Gaultier, da Federico Fallavollita, allievo del Dottorato in Scienze della rappresentazione e del rilievo, alla 'Sapienza' – Università di Roma. Questo lavoro si coniuga con un altro, analogo, di Leonardo Baglioni sulle relazioni trovate da Edward Kasner (1903) tra i cerchi che possono essere costruiti in tangenza a due cerchi dati nello spazio, perciò non complanari. Cfr. Edward Kasner, *The apollonian problem in space*, The American mathematical monthly, X, 6-7, 1903.

[21] Cfr Imre Pál, *Géométrie descriptive, avec figures en relief par les anaglyphs*, Lausanne – Paris 1964 (terza edizione).