La costruzione geometrica come esercizio astratto di architettura

Riccardo Migliari

Convegno Internazionale Genesi dell'Architettura – Strumenti per il progetto
Firenze, 10 – 13 Settembre 2008

Abstract

The solution procedures of a geometric problem in the space follow closely that of the development and definition of an architectural project. The descriptive geometry, in particular, has a heuristic and experimental potential, which has been overlooked during the last twenty years, maybe also because of the profound crisis caused by a mistaken competitive relation with the digital representation techniques. Recently, nevertheless, this relation has changed into an integration of methods, graphical and digital, that, if on the one hand has given the dignity of history back to the CAD, on the other it has profoundly renewed the theories and the applications of descriptive geometry. In the light of these developments, it is possible to recover, to the research and the teaching, the patrimony of knowledges and considerations that the deep past of geometry has handed down to us. Here is traced an example of this renewal in a new and (and old) solution of the Apollonian problem.

Come tutti sappiamo la geometria descrittiva, nelle varie sue declinazioni di natura tecnica, ha rivestito il ruolo di un indispensabile strumento del progetto, per architetti, ingegneri e designer, almeno fino alla fine degli anni '80. Anche quando i personal computer avevano già invaso gli studi dei progettisti, e il CAD era bidimensionale, la geometria descrittiva governava la produzione delle rappresentazioni delle forme a tre dimensioni che sono l'esito del progetto.

Nel 1988, tuttavia, si è verificato un evento la cui portata storica è forse possibile apprezzare soltanto oggi, a distanza di vent'anni (figura 1). Questo evento è la comparsa di software capaci di gestire uno spazio virtuale, nel quale chi progetta può disegnare non già la proiezione bidimensionale di una forma, ma la forma stessa in tre dimensioni. Queste applicazioni, ancora rozze al loro primo apparire, hanno subito in questi anni una evoluzione rapidissima, supportata da uno sviluppo tecnologico altrettanto intenso, sicché è oggi possibile disegnare nello spazio virtuale della rappresentazione matematica forme complesse e ricavare, da queste rappresentazioni digitali, le proiezioni grafiche in modo totalmente automatico.

Tutto ciò è noto e, credo, condivisibile. Un aspetto, tuttavia, in questa rivoluzione, è meno noto, ed è quello su cui vorrei soffermarmi: mi riferisco alla geometria descrittiva e alla sua riconquista dell'invenzione.

Nel 1988 la geometria descrittiva aveva circa due secoli e per due secoli era stata impiegata in due ruoli principali: la formazione, cioè l'educazione alla immaginazione dello spazio, e la produzione delle rappresentazioni dello spazio, cioè, sostanzialmente, la produzioni di immagini codificate capaci di restituire le forme a tre dimensioni in prototipi e realizzazioni fisiche. Tale lunga consuetudine aveva oscurato quello che forse è il più importante *oggetto* della geometria dei progettisti, nella definizione di Monge, vale a dire il suo impiego *euristico* e *sperimentale*[1]. Cosa intendo dire con

[1] "Le premier (objet de la géométrie descriptive) est de répresenter avec exactitude, sur les dessins qui n'ont que deux dimensions, les objets qui en ont trois, et qui sont susceptibles de définition rigoreuse. Sous ce point de vue, c'est une langue nécessaire à l'homme de genie qui conçoit un projet, à ceux qui doivent en diriger l'exécution, et enfin aux artistes qui doivent eux-même en executer les différentes parties. Le second objet de la géométrie descrittive est de déduire de la description exacte des corps tout

queste espressioni? Euristico è l'uso della rappresentazione come mezzo di indagine e di scoperta (figura 2). Sperimentale è invece l'uso come strumento di verifica (figura 3).
Ora, chi progetta sa bene cosa intendo dire: rappresentare una forma vuol dire verificarne la concezione (uso sperimentale) ma anche scoprire nuove suggestioni per modificarla fino a perfezionarla (uso euristico). Questo uso della geometria descrittiva è anche prassi della ricerca scientifica e, forse, a maggior ragione. Si pensi, per citare solo alcuni esempi, alla scoperta delle sezioni toriche di Yvon Villarceau[2], alle indagini di Louis Gaultier[3] intorno alla declinazione tridimensionale del problema di Apollonio.
Ecco dunque una prima ragione per affermare che progetto e indagine geometrico-descrittiva sono simili al punto che l'indagine geometrica può essere considerata un esercizio astratto del progetto.
Ma, prima di sviluppare ancora questo argomento, conviene tornare alla nostra storia recente e all'avvento della rappresentazione digitale. La produzione automatica dei grafici tradizionali, come piante e sezioni, gli analoghi automatismi nella costruzione di forme tridimensionali già pronte, che vanno dalle più semplici primitive a oggetti parametrici anche molto complessi, e non ultimo, l'impegno richiesto nell'apprendere una tecnica di disegno mediata da tastiere e altre 'protesi' della mano, hanno finito col farci credere che la geometria descrittiva fosse del tutto obsoleta e destinata ormai ad aver spazio solo nella storia della scienza. Ebbene, io credo che non sia affatto così, ma non perché le tecniche grafiche resteranno pur sempre un modo spedito per annotare le idee, o per altre ragioni, diciamo, conservative; dico invece che la geometria descrittiva è ancora indispensabile per pensare lo spazio, anche con il supporto del computer e dunque mantiene intatto il suo potenziale euristico, sperimentale e formativo.
Potrei portare molti esempi, ma mi limiterò a quello che mi sembra più convincente. Consideriamo quattro sfere distinte disposte nello spazio (figura 4) e proponiamoci di costruire la sfera o le sfere che sono tangenti a tutte e quattro.
Questo problema è la quindicesima variazione del problema di Apollonio nella sua estensione allo spazio. Sul piano il problema consiste nel costruire il cerchio che tocca tre enti scelti tra punti, rette e cerchi e ha dieci possibili variazioni. Nello spazio il problema consiste nel costruire la sfera che tocca quattro enti comunque scelti tra punti, piani e sfere e ha quindici variazioni, tra le quali, quella proposta, è senz'altro la più complessa.
Ora, già qui il paragone tra indagine geometrica e progetto si rinforza: infatti affrontare questo problema (come ogni altro simile) significa immaginare forme e operazioni che possono condurci alla soluzione, e questo è progettare. Significa, inoltre, verificare se e come le forme e le operazioni che abbiamo immaginato sono in grado di produrre il risultato voluto, e questo è sperimentare. Significa ancora, strada facendo, intuire e verificare relazioni che non sospettavamo prima di incominciare, e questo è scoprire o inventare (il che poi è la stessa cosa). Cos'è dunque la rappresentazione digitale per la

---

ce qui suit nécessairement de leurs formes et de leurs positions respectives. Dans ce sens, c'est un moyen de rechercher la vérité; elle offre des exemples perpétuels du passage du connu à l'inconnu …". G. Monge, *Géométrie descriptive, Leçons données aux écoles normales, l'An 3 de la République; par Gaspard Monge, de l'Institut national,* Paris An VII (1798), Programme, p. 2.

[2] Sulle vicende legate alla scoperta di Villarceau cfr. G. Loria, *Storia della geometria descrittiva, dalle origini sino ai giorni nostri,* Hoepli Milano, 1921, pag. 251.

[3] Cfr. L. Gaultier de Tours, *Mémoire, Sur les Moyens généraux de construire graphiquement un Cercle determine par trois conditions, et une Sphère determine par quatre conditions; Lu à la première Classe de l'Institut, le 15 Juin 1812,* Journal de l'École polytechinique, XVI, 124 – 214.

geometria descrittiva? Null’altro che uno strumento nuovo, dal quale discendono due *metodi* anch’essi inediti, che sono la rappresentazione matematica (oggi dominata dalle equazioni NURBS) e la rappresentazione numerica o poligonale. Ma i contenuti più autentici e originali della geometria descrittiva, cioè le *costruzioni*, restano quelli di sempre e, semmai, si possono rinnovare e rendere più generali, perciò più potenti, grazie alla accuratezza dei nuovi strumenti.

Riprendiamo allora il nostro esempio per rendere conto di queste ultime considerazioni.

Il modo più semplice per costruire una sfera che ne tocchi altre quattro consiste nel partire da una semplice considerazione: la sfera che risolve il nostro problema (o le sfere se le soluzioni saranno più d’una) avrà il centro equidistante dalla superficie delle quattro sfere date. Infatti, se la sfera da noi costruita tocca le quattro date, sarà possibile condurre quattro segmenti dal centro della sfera costruita ai punti in cui tocca le altre quattro e questi segmenti saranno raggi della sfera stessa, tutti eguali. Dunque il problema si riduce a trovare il punto (o i punti) che equidistano dalle superfici delle sfere date. Per trovare questi punti, consideriamo due sole sfere tra quelle date e chiediamoci: qual è il luogo geometrico dei punti equidistanti dalle loro superfici? Per rispondere a questa domanda conviene sezionare le due sfere con un qualsiasi piano passante per la retta che unisce i due centri: questa sezione produce due cerchi distinti e il problema si riduce a trovare il luogo geometrico dei punti equidistanti da questi due cerchi (figura 5). Ebbene, nel 1596 Adriaan Van Roomen insegna la soluzione di questo problema in un’opera, oggi quasi dimenticata, intitolata *Problema Apolloniacum*[4] (figura 6). La soluzione consiste nel costruire le iperboli che hanno i fuochi nei centri dei due cerchi e i vertici nei punti medi dei quattro segmenti che le due circonferenze staccano sulla retta che appartiene ai centri. Tralasciamo la dimostrazione (figura 7), peraltro banale[5], perché c’è qui un altro aspetto del nostro lavoro, che ci interessa maggiormente. Cercavamo, infatti, il luogo geometrico dei punti equidistanti dalle due circonferenze e troviamo non una curva, come era lecito aspettarsi, ma quattro rami di iperbole. Che significa ciò? Significa, semplicemente, che un cerchio può toccare altri due dati distinti nel piano in quattro modi diversi e non in un solo modo come il nostro intuito ci aveva fatto credere a prima vista (figura 8). Se chiamiamo **A** e **B** i cerchi dati, il cerchio costruito, può toccare **A** e **B** lasciandoli entrambi all’esterno, oppure può comprenderli entrambi nel suo interno, oppure ancora può lasciare **A** fuori e **B** dentro, o viceversa. Se usiamo gli indici ***i*** ed ***e*** per indicare che un cerchio dato è dentro o fuori il cerchio costruito, possiamo nominare le quattro soluzioni come segue: **A*e*B*e*** è il cerchio che lascia i due dati all’esterno, **A*i*B*i*** quello che lascia i due dati all’interno, **A*e*B*i*** e **A*i*B*e*** le altre due possibili combinazioni. Dunque, dati due cerchi distinti nel piano, esistono quattro infinità di cerchi che li toccano entrambi. E questo è un risultato che è frutto del potere euristico della geometria descrittiva o, se preferite, è una scoperta fatta nel corso dell’iter progettuale.

Torniamo ora allo spazio: se facciamo ruotare i due cerchi e le iperboli che abbiamo costruito intorno alla retta che passa per i due centri otteniamo le due sfere date e quattro falde di iperboloidi di rivoluzione, che sono luoghi geometrici dei punti dello spazio equidistanti dalle superfici delle due sfere date.

---

[4] Cfr. *Problema Apolloniacum*, Adrianum romanum constructum, Wirceburgi, 1596.

[5] La dimostrazione è sviluppata in R. Migliari, *Il problema di Apollonio e la geometria descrittiva*, in: Disegnare, idee immagini, Gangemi Roma 2008.

E’ evidente, perciò, che l’intersezione degli iperboloidi, che è possibile costruire per ogni coppia di sfere, fornirà curve che sono luoghi geometrici dei punti equidistanti dalle sfere date prese a gruppi di tre e che queste curve si incontreranno in punti che sono i centri delle sfere che risolvono il problema.
Si può dimostrare e verificare che le soluzioni sono sedici, non tutte però sempre presenti. Si possono anche dimostrare e verificare molte altre proprietà di questa costruzione[6], ma tralascerò di entrare nel merito di questa discussione, perché non è questo ciò che interessa la geometria descrittiva come esercizio astratto del progetto. Mi limiterò a far notare che le curve intersezione delle falde di iperboloidi che abbiamo costruite sono curve piane, anch’esse iperboli, e non gobbe o sghembe, com’era doveroso aspettarsi: altro esempio del potere euristico della geometria.
Mi chiedo ora: cosa c’è di nuovo nella costruzione che ho illustrato? Tutto e niente. La costruzione è tutta nuova, perché né Pierre Fermat[7], né Louis Gaultier[8] hanno seguito questa via, semplice e potente, che generalizza la soluzione del problema di Apollonio, giacché usa il medesimo metodo per risolverlo in ogni sua variazione, nel piano e nello spazio. Non c’è nulla di nuovo, invece, perché la soluzione discende dalla semplice, ma geniale intuizione di Adriaan Van Roomen.
Perché, allora, questa soluzione, così elegante, non ha avuto fortuna? A questa domanda risponde François Viète che nel 1600 respinge la proposta del collega belga, come contraria alla ragione e al metodo euclideo[9]. Sostiene, in sintesi, Viète, che non sia lecito risolvere un problema di geometria piana, com’era quello con cui si misurava Van Roomen, usando strumenti diversi dalla riga e dal compasso. L’uso delle iperboli è, secondo Viète, eterodosso, inaccettabile e non solo per questioni di principio, ma anche per ragioni operative essendo impossibile tracciare l’iperbole con l’accuratezza del cerchio. Poco importa, ma questa è una osservazione mia, che le iperboli appartengano ad Apollonio come a nessun altro geometra del mondo antico e che, di conseguenza, è presumibile che la soluzione da lui proposta, e oggi perduta, fosse proprio fondata sull’uso delle coniche.
Sta di fatto, però, che oggi le riserve di Viète, tramandatesi sino a Gaultier e a Hachette[10], sono del tutto cadute, non solo perché la storia e lo stesso Monge, hanno seguito percorsi nuovi, ma perché, grazie alla rappresentazione digitale è completamente svanito quel limite di accuratezza che vedeva il compasso come strumento principe del geometra e dell’architetto[11]. Oggi noi possiamo disegnare le

[6] L’argomento si trova, discusso e approfondito, in R. Migliari, *Rappresentazione come sperimentazione*, in Ikhnos 2008, analisi grafica e storia della rappresentazione, Lombardi editori Siracusa, 2008.
[7] Cfr. E. Brassine, *Précis des Oeuvres Mathématiques de P. Fermat et de l’Arithmetique de Diophante*; Tolouse 1853.
[8] Cfr. L. Gaultier de Tours, *Mémoire, Sur les Moyens généraux de construire graphiquement un Cercle determine par trois conditions, et une Sphère determinée par quatre conditions; Lu à la première Classe de l’Institut, le 15 Juin 1812,* Journal de l’École polytechinique, XVI, 124 – 214.
[9] F. Viète, *Apollonius Gallus seu, Exsuscitata Apollonii Pergaei περι επαφων Geometria,* Ad V. C. A. R. Belgam, Parigi 1600.
[10] Cfr. Jean Pierre Nicholas Hachette, *Traité de Géométrie Descriptive, comprenant les applications de cette géométrie aux ombres, à la perspective et à la stéréotomie,* Paris 1828 (deuxième édition).
[11] Lorenzo Mascheroni pubblica, nel 1797 un’opera dal titolo *Geometria del compasso*, nella quale dimostra come tutte le costruzioni della geometria possano essere eseguite con l’uso del solo compasso, anziché con l’uso di riga e compassi associati. Questa scelta, che a prima vista potrebbe apparire come un virtuosismo inutile, è ben chiarita nella prefazione del libro dove Mascheroni cita la divisione in Inghilterra dei quadranti astronomici operata da Graham e Bird. Questi, per ottenere una maggiore

coniche, e qualsiasi altra curva, con la medesima accuratezza con cui disegniamo un cerchio o una retta e, di conseguenza, possiamo impiegare queste curve nelle costruzioni geometriche, generando soluzioni assai più semplici e potenti di quanto non avveniva in passato.
Possiamo, ad esempio, utilizzare il contorno apparente di una superficie nella soluzione di problemi di tangenza, operazione che offre una soluzione unica a una intera congerie di costruzioni che, nel passato, erano diverse e trattate separatamente.
Conviene, a questo punto, riassumere il percorso che abbiamo seguito nella soluzione del problema di Apollonio, in chiave progettuale.
Dunque abbiamo supposto l'esistenza di quattro sfere disposte nello spazio, e ciò equivale a prendere in considerazione un sito, nel quale si vuole edificare. Abbiamo poi stabilito la forma dell'edificio in senso metaprogettuale: la sfera cioè, ma non una certa sfera, già nota in posizione e misura. Da questa prima scelta derivano i vincoli del progetto: l'equidistanza del centro della sfera dalle superfici date e dunque l'eguaglianza dei raggi che passano per i quattro punti di contatto. A questo punto abbiamo ipotizzato un percorso logico, traducendo i vincoli in proposizioni più ampie: i luoghi geometrici dei punti dello spazio equidistanti dalle sfere date. Anche questa è una soluzione metaprogettuale, che equivale, a mio modo di vedere, allo studio teorico dei caratteri distributivi dell'edificio da costruire. Infine, abbiamo formulato un certo numero di soluzioni (fino a un massimo di sedici) che, come abbiamo visto, soddisfano tutte i requisiti di progetto.
Non è forse questo un modo astratto di fare architettura, o design, o meccanica?
Non è forse questo il migliore esercizio che si possa immaginare per uno studente architetto, ingegnere o designer, ancora del tutto ignaro dei complessi problemi tecnici e linguistici che rendono difficile un mestiere maturo?
E in questo quadro, torno a dire, che ruolo ha la rappresentazione digitale? Forse può sostituire la geometria descrittiva? No di certo, perché i nuovi metodi rappresentano, sì, in modo più efficace, ma non *costruiscono* nulla di per sé. Ciò che *costruisce,* e attinge infine il risultato, è il pensiero, un pensiero capace di dominare lo spazio.
Questa capacità di *pensare lo spazio* è il vero, autentico, essenziale nocciolo della questione! E non si impara a pensare lo spazio, padroneggiando un programma di modellazione, perché questa capacità, separata dal controllo della geometria, non è sufficiente. Ben vengano dunque gli strumenti e i metodi della rappresentazione digitale, ma come nuovo e più possente supporto del ragionamento geometrico descrittivo.
Tutto ciò, per concludere, si esplicita in un semplice precetto didattico: bisogna riprendere, e in forza, gli esercizi di costruzione geometrica di un tempo e proporli (anche o soprattutto) nello spazio virtuale della rappresentazione digitale. Bisogna, ancora, stabilire un rapporto diretto tra il modello virtuale, controllato per mezzo della geometria, e il modello fisico, proprio come avveniva un tempo con le costruzioni di fili

---

precisione non hanno fatto uso della riga ma del solo compasso. Il tracciamento di una riga, infatti, porta con sé un'incertezza dovuta allo scorrimento della punta e alla forma non perfetta della riga stessa. Il compasso, invece, non è soggetto a queste difficoltà e mantenendo fissa l'apertura e finissima la punta può raggiungere una precisione senza paragoni. Attraverso la sua opera Mascheroni ha risolto molti problemi di geometria avvalendosi del solo compasso e ha fornito agli studiosi un prezioso strumento per raggiungere, quando richiesto, una maggiore precisione nelle costruzioni.

di lana e cartone che si proponevano agli studenti per superare le prime e serie difficoltà della immaginazione spaziale.
La potenza degli strumenti informatici consente di realizzare le suddette costruzioni in modo molto più rapido e sicuro, con tutta l'evidenza della rappresentazione tridimensionale, e consente, perciò, di affrontare anche problemi che da molto tempo l'insegnamento accademico ha trascurato, per l'incapacità di risolvere il conflitto tra gli automatismi informatici e la cultura della geometria e del progetto: e ancora una volta il pensiero va all'*Umanesimo della macchina*, auspicato, o presagito, da Francesco Flora[12].

[12] Cfr. F. Flora, *Civiltà del novecento*, Laterza Bari, 1949.